Algèbre linéaire 1ère année **SÉRIE 6** le 28 novembre 2005

L'exercice 6 est à rendre le 5 décembre au debut de la séance d'exercices.

1. Montrer que $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) \subset V$ est l'intersection des sous-espaces $W \subset V$ tels que $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset W$.
2. Trouver une sous-liste linéairement indépendante de la liste
$$((1,0,1,0),(2,3,0,2),(0,3,-2,2),(0,7,3,0),(5,-1,-2,4))$$
qui engendre le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^4$.
3. Montrer ou trouver un contre-exemple : il existe une base (p_0, p_1, p_2, p_3) de $\mathcal{P}_3(\mathbb{F})$ telle que aucun des polynômes p_0, p_1, p_2, p_3 n'est de degré 2.
4. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Supposons que U est un sous-espace de V tel que $\dim U = \dim V$. Montrer que $U = V$.
5. Supposons que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sont des polynômes dans $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ tels que $p_j(3) = 0 \; \forall \, j$. Montrer que $(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ est linéairement dépendante.
6. Montrer que
$$U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{F}) \mid p(x) = p(1-x)\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, et en trouver une base.
7. Soient U et W des sous-espaces de $\mathbb{F}^8$ tels que $\dim U = 3$, $\dim W = 5$, et $U + W = \mathbb{F}^8$. Montrer que $U \cap W = \{0\}$.
8. Soient U et W des sous-espaces de $\mathbb{F}^9$ tels que $\dim U = \dim W = 5$. Montrer que $U \cap W \neq \{0\}$.