Algèbre linéaire 1ère année **SÉRIE 7** le 5 décembre 2005

L'exercice 4 est à rendre le 12 décembre au debut de la séance d'exercices.

1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires.
   (a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
   (b) $T_2 : \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$; $T_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.
   (c) $T_3 : \mathcal{P}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^2$; $T_3 p = (p(0), p(1))$.
   (d) $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T_4(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - 2x_1, 3x_2)$.
   (e) $T_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $T_5(a + bi) = a - bi$, en traitant $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.
   (f) $T_6 = T_5$, en traitant $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 1.
2. Pour chaque application suivante, montrer qu'elle est linéaire, calculer son noyau et son image, et déterminer si elle est injective ou surjective.
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$; $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, x_3 - x_2)$.
   (b) $T : \mathcal{F}(\{1, 2, \ldots, n\}, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}^n$; $Tf = (f(1), f(2), \ldots, f(n))$.
   (c) $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$;
   $$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}.$$
3. Trouver un exemple d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
   $$f(a\vec{v}) = af(\vec{v}) \ \forall\ a \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$$
   qui n'est pas linéaire.
4. Soit $T : V \to W$ une application linéaire.
   (a) Montrer que si T est injective et $(v_1, \ldots, v_n)$ est linéairement indépendante, alors $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ est linéairement indépendante.
   (b) Montrer que si T est surjective et $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre V alors $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ engendre W.
5. Soit $S : U \to V$, $T : V \to W$ des applications linéaires injectives. Montrer que $T \circ S : U \to W$ est injective.
6. Si $V = U \oplus W$, l'application linéaire $P : V \to V$ définie par $P(u + w) = w$ pour chaque $u \in U$, $w \in W$ est appelée la *projection sur W le long de U*. On dit qu'une application lináire $P : V \to V$ est un *projecteur* si $P \circ P = P$. Montrer que si P est un projecteur de V, alors $V = \ker P \oplus \operatorname{Im} P$ et P est la projection sur $\operatorname{Im} P$ le long de $\ker P$.