Algèbre linéaire 1ère année — SÉRIE 8 — le 12 décembre 2005

L'exercice 3 est à rendre le 19 décembre au début de la séance d'exercices.

Dans cette série, U, V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{F}$. On note $\mathrm{Id}_V : V \to V$ l'identité de V.

1. (a) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4, \mathbb{F}^2)$ telle que
$$\ker T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 \mid 2x_1 = 3x_3 \text{ et } x_2 = -x_4\}.$$
Montrer que T est surjective.

   (b) Soit
$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{F}^5 \mid x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = 2x_4 = 3x_5\}.$$
Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $T : \mathbb{F}^5 \to \mathbb{F}^2$ telle que $\ker T = U$.

2. Soient $S \in \mathcal{L}(U, V)$ et $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Montrer que
$$\dim \ker(T \circ S) \leq \dim \ker S + \dim \ker T.$$

3. Soit $T : V \to W$ une application linéaire.

   (a) Montrer que T est injective si et seulement s'il existe une application linéaire $S : W \to V$ telle que $S \circ T = \mathrm{Id}_V$. L'application S est appellée un *inverse à gauche* de T.

   (b) Donner un exemple qui montre qu'un inverse à gauche n'est pas forcément unique.

   (c) Montrer que T est surjective si et seulement s'il existe une application linéaire $S : W \to V$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}_W$. L'application S est appellée un *inverse à droite* de T.

   (d) Donner un exemple qui montre qu'un inverse à droite n'est pas forcément unique.

   (e) Soient $S, S' : W \to V$ telles que $S \circ T = \mathrm{Id}_V$ et $T \circ S' = \mathrm{Id}_W$. Montrer que $S = S'$.

4. On rappelle qu'une application linéaire $T : V \to V$ est *inversible* s'il existe une application linéaire $T^{-1} : V \to V$ telle que $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_V$. On note $GL(V) \subset \mathcal{L}(V, V)$ l'ensemble des applications linéaires inversibles.

   (a) Montrer que $GL(V)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V, V)$.

   Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération binaire $*$, tel que (i) il existe $e \in G$ tel que $e * g = g * e = g \ \forall g \in G$, (ii) $\forall g \in G$, il existe $h \in G$ tel que $h * g = g * h = e$, et (iii) $g * (h * k) = (g * h) * k \ \forall g, h, k \in G$.

   (b) Montrer que $GL(V)$ est un groupe par rapport à la composition d'applications linéaires.

5. Déterminer la dimension de $\mathcal{L}(V, W)$. (Indication : fixer des bases de V et de W.)