L'exercice 4 est à rendre le 6 février au début de la séance d'exercices.
Dans cette série, on représente les éléments de $\mathbb{F}^n$ par des matrices colonnes,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Pour $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$, on définit $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$, l'opérateur linéaire associé à A, par $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver les valeurs propres de $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et les espaces propres y associés.
   (b) Dessiner $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $T_A(\mathbf{e}_1)$, et $T_A(\mathbf{e}_2)$ dans le plan et décrire T_A géométriquement.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $A^2 = A \cdot A$ et essayer de trouver une formule pour A^n, $n \geq 1$.
   (b) Trouver les valeurs propres de $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et les espaces propres y associés.
   (c) Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dessiner $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $T_A(\mathbf{e}_1)$, et $T_A(\mathbf{e}_2)$ dans le plan et décrire T_A géométriquement.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $A^2 = I_2$, c-à-d que $A = A^{-1}$.
   (b) Trouver les valeurs propres de $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
   (c) Trouver une base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de vecteurs propres de T_A (indication : poser $\theta = 2\alpha$). Dessiner $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $T_A(\mathbf{v}_1)$, et $T_A(\mathbf{v}_2)$ dans le plan et décrire T_A géométriquement.
4. (a) Soit $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{C})$. Vérifier que $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ et une base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de $\mathbb{C}^2$ de vecteurs propres.
   (c) Calculer UAU^{-1} et montrer que $(U\mathbf{v}_1, U\mathbf{v}_2)$ est une base de vecteurs propres de UAU^{-1}.
5. Soient $S, T \in \mathcal{L}(V)$ avec S inversible. Montrer que T et $S \circ T \circ S^{-1}$ possèdent les mêmes valeurs propres, et que $v \in V$ est un vecteur propre de T si et seulement si $S(v) \in V$ est un vecteur propre de $S \circ T \circ S^{-1}$.
6. Soient $S, T \in \mathcal{L}(V)$ tel que T possède $\dim V$ valeurs propres distinctes. On suppose que v est un vecteur propre de S si et seulement si v est un vecteur propre de T. Montrer que $S \circ T = T \circ S$, en explicitant où l'on utilise la première hypothèse.