L'exercice 4 est à rendre le 20 mars au début de la séance d'exercices.

1. Inverser les matrices suivantes, lorsque c'est possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Q}) \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & i \\ i & 0 & 2i \\ -1 & 1 & 5+i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{C})$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?

3. Soit $A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{F})$. La *transposée* de A est la matrice $A^t \in \mathrm{Mat}(n,m,\mathbb{F})$ avec $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. Par exemple, la transposée de $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer A^tA, et puis déterminer A^{-1}.

4. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{C}), \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R}).$$

   (a) Trouver toutes les valeurs propres et tous les vecteurs propres associés.

   (b) Diagonaliser ces matrices lorsque c'est possible et donner la matrice de changement de base.