L'exercice 5 est à rendre le 3 avril au début de la séance d'exercices.

1. Soit $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$, $\beta(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, une fonction qui est linéaire dans le premier facteur : $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Montrer que si $\overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in V$, alors β est conjugué-linéaire dans le deuxième facteur, et donc elle est une forme hermitienne.
2. Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On définit la *distance* entre deux vecteurs $\vec{v}, \vec{w} \in V$ par
$$d(\vec{v}, \vec{w}) := \|\vec{v} - \vec{w}\|.$$
Montrer que
$$d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$$
pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.

Pour les deux prochains exercices, on considère un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$.

3. Montrer que $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{0} \rangle = 0$ pour tout $\vec{v} \in V$.
4. Soit S une partie de V. Montrer
   (a) que $S^\perp$ est un sous-espace de V ;
   (b) que $S \cap S^\perp = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \vec{0} \notin S \\ \{\vec{0}\} & \text{si } \vec{0} \in S; \end{cases}$
   (c) que $V^\perp = \{\vec{0}\}$ et que $\{\vec{0}\}^\perp = V$.
5. On considère le produit scalaire $\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$ sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Calculer $W^\perp$ si
   (a) $W = \operatorname{span}(1, x)$,
   (b) $W = \operatorname{span}(1 - x^2)$.

Pour le dernier exercice, $\mathbb{R}^k$ est muni du produit scalaire usuel pour tout k.

6. Soit $A \in \operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^t$.
   (b) On pose
   $$W = \operatorname{span}((1, 0, 3), (1, 2, 7)) \subset \mathbb{R}^3.$$
   Trouver une base de $W^\perp$.
   (c) Montrer que les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si $A^t A$ est inversible.