L'exercice 4 est à rendre le 10 avril au début de la séance d'exercices.

1. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux bases suivantes.
   (a) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$; $B = (x, x^2, 1)$; $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$;
   (b) $V = \mathbb{R}^3$; $B = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$; produit scalaire euclidéen ;
   (c) $V = \mathbb{R}^2$, $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \mathbf{v}^t \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}$.
2. Soit A une matrice réelle $m \times n$ telle que les colonnes $(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n)$ de A forment une liste linéairement indépendante. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ pour obtenir une base orthonormale de $\operatorname{Im} A$, $(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n)$. On pose $Q = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n]$.
   (a) Montrer que $\mathbf{a}_j = Q\mathbf{r}_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, où $\mathbf{r}_j = [\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{q}_1\rangle \cdots \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{q}_n\rangle]^t$.
   (b) Former la matrice $R = [\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n]$. Montrer que $A = QR$ et que R est triangulaire supérieur et inversible.
   (c) Trouver une telle QR-décomposition pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. Une matrice carrée réelle A est dite *orthogonale* si $A^t = A^{-1}$, c-à-d que $A^tA = AA^t = I$.
   (a) Montrer que $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ sont des matrices orthogonales pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Décrire les opérateurs linéaires associés.
   (b) Soient B, B' deux bases orthonormales de l'espace réel V de dimension finie. Montrer que $[\mathrm{Id}_V]_{B',B}$ est orthogonale.
   (c) Montrer que A^{-1} est orthogonale si A est orthogonale.
   (d) Montrer que si A et B sont des matrices orthogonales $n \times n$, alors AB est orthogonale.
   (e) Montrer que si A est une matrice orthogonale $n \times n$, alors les lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ par rapport au produit scalaire euclidéen, et pareillement pour les colonnes de A.
   (f) On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire et de la norme euclidéens. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$. Montrer que
      i. A est orthogonale ssi $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$;
      ii. A est orthogonale ssi $\|A\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
4. Soit $U = \operatorname{span}((1,1,0,0),(1,1,1,2)) \subset \mathbb{R}^4$. Trouver $\vec{u} \in U$ qui minimise $\|\vec{u} - (1,2,3,4)\|$.
5. Trouver $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $p(0) = 0$ et $p'(0) = 0$, qui minimise $\int_{-1}^1 (2 + 3x - p(x))^2 dx$.