L'exercice 6 est à rendre le 24 avril au début de la séance d'exercices.

1. On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x - y &= -1 \\ x - 4y &= 2 \\ 2x + y &= 4 \end{cases}$$

   (a) Montrer que le système est inconsistant.
   (b) Trouver le système normal y associé.
   (c) Utiliser la méthode de moindres carrés pour trouver une solution approximative.

2. Trouver l'équation de la droite donnée par la méthode de moindres carrés pour l'ensemble

$$\{(0.5, 2.1), (1.0, 2.4), (2.5, 2.8), (4.0, 3.4)\}.$$

Dur !

3. Appliquer la méthode de moindres carrés pour trouver une *parabole* $y = ax^2 + bx + c$ qui est la meilleure approximation à l'ensemble

$$\{(-2, 8.4), (-1, 2.7), (0, 0.8), (1, 3.1), (2, 9.2)\}.$$

4. On considère $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Trouver $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)e^x dx$$

   pour tout $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

5. (a) Montrer que $\varphi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = p(1/2)$, est un fonctionnel linéaire.
   (b) Trouver un polynôme $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tel que $p(1/2) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ pour tout $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

6. Trouver les adjoints des applications linéaires suivantes.
   (a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$; $T(x, y) = (x + y, y)$.
   (b) Fixer $\vec{w} \in V$; $T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$; $T\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$.
   (c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$; $T(z_1, \ldots, z_n) = (0, z_1, \ldots, z_{n-1})$.

7. Supposons que $T \in \mathcal{L}(V)$ et $\lambda \in \mathbb{F}$. Montrer que λ est une valeur propre de T si et seulement si $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de T^*.

8. Supposons que $T \in \mathcal{L}(V)$ et U est un sous-espace de V. Montrer que U est invariant par rapport à T si et seulement si $U^\perp$ est invariant par rapport à T^*.

9. Supposons que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Montrer que
   (a) T est injective si et seulement si T^* est surjective ;
   (b) T est surjective si et seulement si T^* est injective.