L'exercice 4 est à rendre le 22 mai au début de la séance d'exercices.

1. On rappelle *l'algorithme de division* : étant donné $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ avec $p \neq 0$, il existe $r, s \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ avec $\deg r < \deg q$ ou $r = 0$, tel que $p = sq + r$.
   (a) Diviser $x^3 + 8x^2 + 16x - 4$ par $x^2 + 3x - 1$ et $x^n - 1$ par $x - 1$, où $n \geq 1$.
   (b) Un nombre $\lambda \in \mathbb{F}$ est appellé *racine* de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ si $p(\lambda) = 0$. Soit $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. On dit que q *divise* p s'il existe $s \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tel que $p = sq$. Montrer que si q divise p, alors toute racine de q est une racine de p.
   (c) Montrer que $\lambda \in \mathbb{F}$ est une racine de p si et seulement si $x - \lambda$ divise p.
2. Décomposer les polynômes suivants sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
   (a) $x^4 - 1$,
   (b) $x^3 + x^2 - 2$,
   (c) $6x^2 + x - 2$.
3. Trouver les polynômes caractéristiques des opérateurs $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ suivants.
   (a) $T(w, z) = (z, 0)$,
   (b) $T(w, z) = (-z, w)$,
   (c) $T(w, z) = (5w + z, 5z)$.
4. On définit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ par
$$T(w, x, y, z) = (w - 2x + y + z, w - x + z, z, 0).$$
   Trouver une base B de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs propres généralisés de T, et calculer $[T]_B$.
5. (a) Soit $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ le polynôme caractéristique de $T \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que T est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.
   (b) On suppose que $T \in \mathcal{L}(V)$ est inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $q \in \mathcal{P}(F)$ tel que $T^{-1} = q(T)$.