*L'exercice 2 est à rendre le 12 juin au début de la séance d'exercices.*

1. On considère $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $T(x,y,z) = (-z,y,x)$. Trouver une base $B$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $[T]_B$ est triangulaire supérieure en blocs de taille minimale.
2. On considère $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $T(x,y,z) = (z,x,y)$. Trouver une base $B$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $[T]_B$ est triangulaire supérieure en blocs de taille minimale.
3. Soient $A = \begin{bmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$ deux matrices triangulaires supérieures en blocs, avec $A_1, B_1 \in \mathrm{Mat}(n_1, n_1, \mathbb{F})$ et $A_2, B_2 \in \mathrm{Mat}(n_2, n_2, \mathbb{F})$.
   (a) Montrer que $AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & * \\ 0 & A_2B_2 \end{bmatrix}$.
   (b) Soit $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Montrer que $p(A) = \begin{bmatrix} p(A_1) & * \\ 0 & p(A_2) \end{bmatrix}$.

   Soit $C = \begin{bmatrix} C_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & C_k \end{bmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure en blocs.

   (c) Montrer que $p(C) = \begin{bmatrix} p(C_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p(C_k) \end{bmatrix}$.
4. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer $c_A(x)$.
   (b) Trouver une base $B$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de $T_A$.
   (c) Calculer $[T_A]_B$ et son polynôme caractéristique.
5. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Soit $p(x) = x^2 - 2x + 1$. Vérifier que $p(A)$ est inversible.