Pas d'exercice à rendre.

1. Trouver les paires propres des matrices réelles suivantes.

   (a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -/\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

2. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $5, 7$ sont des valeurs propres de T, alors T n'a pas de paire propre.

3. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Supposons que $T \in \mathcal{L}(V)$ vérifie

$$\ker T^{n-2} \neq \ker T^{n-1}.$$

   Montrer que T possède au plus deux valeurs propres, et que T n'a pas de paire propre.

4. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit $S \in \mathcal{L}(V)$ une isométrie. Montrer que si (α, β) est une paire propre de S, alors $\beta = 1$.