Pas d'exercice à rendre.

1. Trouver $[T_A]_B$ pour les matrices A et les bases B suivantes.
   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $((4,2),(5,3))$.
   (b) $\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$; $((1,-1),(12,9))$.
   (c) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$.
2. Montrer les propriétés élémentaires suivantes du déterminant d'une matrice $A \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{F})$.
   (a) $\det A^* = \overline{\det A}$.
   (b) Pour tout $a \in \mathbb{F}$, $\det(aA) = a^n \det A$.
   (c) S'il existe $1 \leq i < j \leq n$ et $a \in \mathbb{F}$ tels que soit $\vec{\ell}_i(A) = a \cdot \vec{\ell}_j(A)$, soit $\vec{c}_i(A) = a \cdot \vec{c}_j(A)$, alors $\det A = 0$.
   (d) Si A' est obtenue de A en permutant deux lignes ou deux colonnes, alors $\det A' = -\det A$.
3. Déterminer si les permutations suivantes sont paires ou impaires.
   (a) $\sigma \in \mathfrak{S}_3$; $\sigma = (\,1\,2\,3\,)$.
   (b) $\sigma \in \mathfrak{S}_4$; $\sigma = (\,1\,3\,)(\,2\,4\,)$.
   (c) $\sigma \in \mathfrak{S}_7$; $\sigma = (\,2\,4\,3\,7\,1\,5\,)$.
   (d) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; $\sigma = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_m)$ où $m \leq n$ et $a_1, \ldots, a_m$ sont des éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$.
4. (a) Trouver un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V et $T \in \mathcal{L}(V)$ tels que $\mathrm{Tr}(T^2) < 0$.
   (b) Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $T \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que si V a une base de vecteurs propres de T, alors $\mathrm{Tr}(T^2) \geq 0$.
5. Montrer que si $P \in \mathcal{L}(V)$ vérifie $P^2 = P$, alors $\mathrm{Tr}(P)$ est un nombre naturel. (Indication : l'exercice 6 de la série 7.)
6. Montrer ou donner un contre-exemple aux propositions suivantes.
   (a) Si $T \in \mathcal{L}(V)$ et $c \in \mathbb{F}$, alors $\mathrm{Tr}(cT) = c \cdot \mathrm{Tr}(T)$.
   (b) Si $S, T \in \mathcal{L}(V)$, alors $\mathrm{Tr}(S \circ T) = (\mathrm{Tr}\, S)(\mathrm{Tr}\, T)$.
   (c) Si $S, T \in \mathcal{L}(V)$, alors $\det(S + T) = \det S + \det T$.