TRAVAIL ÉCRIT III

École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire 2005–2006
Professeur K. Hess Bellwald
le 8 juin 2006
Durée : 1h45

NOM : _____

PRÉNOM : _____

SECTION : _____

QUESTION	VALEUR	POINTS
1	/30	
2	/20	
3	/30	
4	/20	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

1. Trouver les adjoints des applications linéaires suivantes.
   [10] (a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$; $T(x, y) = (x + y, y)$.
   [10] (b) Fixer $\vec{w} \in V$; $T \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$; $T\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. (Astuce : le produit scalaire dans $\mathbb{F}$ est donné par $\langle \lambda, \mu \rangle = \lambda \cdot \overline{\mu}$.)
   [10] (c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$; $T(z_1, \ldots, z_n) = (0, z_1, \ldots, z_{n-1})$.

[20]

2. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Trouver tous les $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ qui minimisent $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_{\text{eucl}}$.

2. (suite)

[10] 3. Justifier votre réponse.

(a) Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Soit $V = \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{F})$, muni du produit scalaire $\langle B, C \rangle = \mathrm{Tr}(B^* C)$. Existe-t-il une base B de V et une isométrie $T \in \mathcal{L}(V)$ telles que $[T]_B = A$?

[10] (b) Soit $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{F})$. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$, et soit $p(x) \in V$. S'il existe $q(x) \in V$ tel que $T^7(q(x)) = p(x)$, existe-t-il $r(x) \in V$ tel que $T^5(r(x)) = p(x)$?

[10] (c) Soit $B = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ une base d'un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$. Poser $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i$. Si $\|\vec{v}\| = 3$, est-il possible que B soit orthonormale ?

4. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$.

[5] (a) Qu'est-ce que l'adjoint de T ? Quand est-ce que T est autoadjoint ? normal ?

[5] (b) Donner deux exemples d'opérateurs normaux, autre qu'un multiple de Id_V.

[10] (c) Dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, montrer que s'il existe une base orthonormale de V, formée de vecteurs propres de T, alors T est normal.

4. (suite)