L'ALGORITHME DE GAUSS-JORDAN

1. La forme échelonnée (réduite) d'une matrice augmentée

Considérer le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sa **matrice augmentée** est la matrice de taille $m \times (n+1)$

$$[A\vdots\vec{b}] := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m. \end{bmatrix}$$

La matrices augmentée $[A\vdots\vec{b}]$ est en **forme échelonnée** si les trois conditions suivantes sont satisfaites.

(1) Si $\vec{\ell}_i\big([A\vdots\vec{b}]\big) \neq \vec{0}$, alors son premier coefficient non-nul depuis la gauche est un 1, que l'on appelle le **pivot** de $\vec{\ell}_i\big([A\vdots\vec{b}]\big)$.

(2) Si $\vec{\ell}_i\big([A\vdots\vec{b}]\big) = \vec{0}$, alors $\vec{\ell}_j\big([A\vdots\vec{b}]\big) = \vec{0}$ pour tout $j > i$. Autrement dit, toutes les lignes de zéros se trouvent ensemble en bas de la matrice.

(3) Si $\vec{\ell}_i\big([A\vdots\vec{b}]\big) \neq \vec{0}$ et $\vec{\ell}_{i+1}\big([A\vdots\vec{b}]\big) \neq \vec{0}$, avec pivots $\big([A\vdots\vec{b}]\big)_{ij} = 1$ et $\big([A\vdots\vec{b}]\big)_{i+1k} = 1$, alors $j < k$. Autrement dit le pivot de la $i^{\text{ème}}$-ligne se trouve à gauche de celui de la $(i+1)^{\text{ème}}$-ligne.

Elle est en **forme échelonnée réduite** si, de plus, la condition suivante est vérifiée.

(4) Si $\vec{c}_j\big([A\vdots\vec{b}]\big)$ contient un pivot $\big([A\vdots\vec{b}]\big)_{ij} = 1$, alors $\big([A\vdots\vec{b}]\big)_{kj} = 0$ pour tout $k \neq i$. Autrement dit, un pivot est le seul coefficient non-nul dans sa colonne.

L'intérêt des matrices augmentées en forme échelonnée réside dans la facilité avec laquelle on trouve les solutions du système linéaire y associé.

Exemples.

(1) Une matrice en forme échelonnée et son système linéaire associé:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

On voit facilement que les solutions de ce système sont les vecteurs

$$(-4 - 2s + 2t, s, 3 - 2t, t)$$

pour tous $s, t \in \mathbb{F}$.

(2) Une matrice en forme échelonnée réduite et son système linéaire associé:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 \quad = 3 \\ \quad x_2 - x_3 \quad = -2 \\ \qquad\qquad x_4 = -7 \end{cases}$$

On voit encore plus facilement que les solutions de ce système sont les vecteurs

$$(3 - 2s, -2 + s, s, -7)$$

pour tout $s \in \mathbb{F}$.

2. L'algorithme de Gauss-Jordan

Nous résumons ici un algorithme qui permet de transformer toute matrice en une matrice en forme échelonnée (réduite). Cet algorithme utilise les opérations suivantes.

Définition. Soit A une matrice de taille $m \times n$, à coefficients dans $\mathbb{F}$. Il y a trois types d'**opérations élémentaires sur les lignes** de la matrice A.

(1) Opération $\mathrm{I}_{i,j}$: Permuter $\vec{\ell}_i(A)$ et $\vec{\ell}_j(A)$, pour obtenir une nouvelle matrice A' de même taille et telle que

$$\vec{\ell}_k(A') = \begin{cases} \vec{\ell}_i(A) : k = j \\ \vec{\ell}_j(A) : k = i \\ \vec{\ell}_k(A) : \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) Opération $\mathrm{II}_{i,\lambda}$: Multiplier $\vec{\ell}_i(A)$ par $\lambda \in \mathbb{F}$, pour obtenir une nouvelle matrice A'' de même taille et telle que

$$\vec{\ell}_k(A'') = \begin{cases} \lambda \cdot \vec{\ell}_i(A) : k = i \\ \quad \vec{\ell}_k(A) : \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Opération $\mathrm{III}_{i,j,\lambda}$: Remplacer $\vec{\ell}_i(A)$ par $\vec{\ell}_i(A) + \lambda \cdot \vec{\ell}_j(A)$ pour obtenir une nouvelle matrice A''' de même taille et telle que

$$\vec{\ell}_k(A''') = \begin{cases} \vec{\ell}_i(A) + \lambda \cdot \vec{\ell}_j(A) : k = i \\ \qquad\qquad \vec{\ell}_k(A) : \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algorithme. Soit A une matrice $m \times n$.

(1) Soit $j_0 = \min\{j \mid \vec{c}_j(A) \neq \vec{0}\}$. Autrement dit, $\vec{c}_{j_0}(A)$ est la première colonne non-nulle de A depuis la gauche. S'il n'y a pas de colonne non-nulle, alors la matrice A est la matrice zéro, qui est en forme échelonné réduite, et l'algorithme s'arrête.

(2) Si $(A)_{1j_0} = 0$, appliquer à A l'opération I_{1,i_0}, où $(A)_{i_0j_0} \neq 0$, pour obtenir une nouvelle matrice A' telle que $(A')_{1j_0} \neq 0$. (Il existe forcément un tel i_0, puisque $\vec{c}_{j_0}(A) \neq \vec{0}$.)

(3) Appliquer à A' l'opération $\mathrm{II}_{i,\lambda}$, où $\lambda = (A')^{-1}_{1j_0}$, pour obtenir une nouvelle matrice A'' telle que $(A'')_{1j_0} = 1$.

(4) Pour tout $i > 1$, appliquer à A'' l'opération $\mathrm{III}_{i,1,\lambda_i}$, où $\lambda_i = -(A'')_{ij_0}$, pour obtenir une nouvelle matrice A''' telle que $(A''')_{ij_0} = 0$ quelque soit $i > 1$.

(5) Soit B la matrice de taille $(m-1) \times (n-j_0)$ obtenue de A''' en enlevant les colonnes $\vec{c}_1(A'''), ..., \vec{c}_{j_0}(A''')$ et la ligne $\vec{\ell}_1(A''')$. Appliquer les étapes (1)-(4) de l'algorithme à B et ensuite l'étape (5) à la matrice B''' qui en résulte.

Après au plus m circuits à travers l'algorithme, il s'arrête, et la matrice $\hat{A}$ obtenue à la fin est en forme échelonnée. Si l'on veut une forme échelonnée réduite, il faut suivre les étapes ci-dessous.

(6) Soit

$$j_1 = \max\{j \mid \vec{c}_j(\hat{A}) \text{ contient un pivot et au moins un autre coefficient non-nul}\}.$$

Si toute colonne contenant un pivot n'a aucun autre coefficient non-nul, l'algorithme s'arrête. Soit $(\hat{A})_{i_1j_1} = 1$ le pivot.

Pour tout $i < i_1$, appliquer à $\hat{A}$ l'opération $\mathrm{III}_{i,i_1,\mu_i}$, où $\mu_i = -(\hat{A})_{ij_1}$, pour obtenir une nouvelle matrice $\hat{A}'$ telle que $(\hat{A}')_{ij_1} = 0$ pour tout $i \neq i_1$.

(7) Appliquer l'étape (6) à la matrice $\hat{A}'$.

Cette deuxième partie de l'algorithme s'arrête après au plus n étapes. La matrice $\check{A}$ obtenue à la fin est en forme échelonnée réduite.

Une illustration détaillée de l'application de cet algorithme sera fournie au cours.