EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Corrigé de la série 11

Correction exercice 1

1. *Soit* $x \in E$ *représenté par l'unique couple* $(x', x'') \in F \times G$ *tel que* $x = x' + x''$*. On a* $p(x) = x'$ *qui correspond au couple* $(x', 0) \in F \times G$*. Par conséquent,* $p \circ p(x) = x' = p(x)$*. On en déduit que* $p \circ p = p$*.*

   Déterminons $Im(p)$
   D'une part $p(x) = x' \in F$ *d'où* $Im(p) \subset F$*. D'autre part, tout* x *dans* F *correspond au couple* $(x, 0) \in F \times G$*, donc* $x = p(x) \in Im(p)$*, d'où* $F \subset Im(p)$*. On en déduit que* $F = Im(p)$*.*

   Déterminons $Ker(p)$
   Un élément x'' *de* G *est représenté par le couple* $(0, x'') \in F \times G$*, donc* $p(x'') = 0$*, d'où* $G \subset Ker(p)$*. D'autre part pour un élément* x *de* E*, on a :* $p(x) = 0$ *si et seulement si* $x' = 0$*. D'où* $x \in G$*.*
2. *Réciproquement, soit* $p \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $p \circ p = p$*, montrons que* $Im(p) \oplus Ker(p) = E$*.*
   Soit $x \in Ker(p) \cap Im(p)$*. Alors,* $p(x) = 0$ *et il existe* $y \in E$ *tel que* $x = p(y)$*, d'où :*

   $$0 = p(x) = p(p(y)) = (p \circ p)(y) = p(y) = x.$$

   Par conséquent : $Ker(p) \cap Im(p) = \{0\}$*.*

   Soit $x \in E$*, on a* $x = p(x) + (x - p(x))$ *où* $p(x) \in Im(p)$ *et* $x - p(x) \in Ker(p)$ *car* $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = 0$*. Par conséquent :* $E = Ker(p) + Im(p)$*.*

   On en déduit facilement que p *est le projecteur sur* $Im(p)$ *parallèlement à* $Ker(p)$*.*

Correction exercice 2

Raisonnons par l'absurde et supposons que la famille $\{p, q\}$ *est liée, c'est à dire qu'il existe un couple* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ *dans* $\mathbb{F}_2$ *tel que :* $\lambda p + \mu q = 0$*.*

- *Si* $\lambda = 0$ *comme* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ *on a* $\mu \neq 0$*. On aurait alors* $\mu q = 0$ *et donc* $q = 0$*, ce qui est en contradiction avec les hypothèses.*
- *De même, si* $\mu = 0$ *on obtient que* $p = 0$ *ce qui est absurde.*
- *Si* $\lambda \neq 0$ *et* $\mu \neq 0$*, en notant* $\alpha = \frac{-\mu}{\lambda} \neq 0$*, on a* $p = \alpha q$*. On en déduit que :*

  $$\alpha q = p = p^2 = \alpha^2 q^2 = \alpha^2 q$$

  et donc $\alpha = \alpha^2$ *puisque* $q \neq 0$*. Cette égalité se récrit* $\alpha(\alpha - 1) = 0$*, et comme* $\alpha \neq 0$ *on a* $\alpha = 1$ *et donc* $p = q$ *ce qui est en contradiction avec les hypothèses.*

On en déduit que $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ *et donc que la famille* $\{p, q\}$ *est linéairement indépendante.*

Correction exercice 3
Soit $x \in E$. Etant donné que $x-p(x) \in Ker(p) = Ker(q)$, on a $q(x-p(x)) = 0$. Par conséquent, $q(x) = (q \circ p)(x)$. De manière similaire on montre que $p(x) = (p \circ q)(x)$. Or, $(p \circ q)(x) = (q \circ p)(x)$ par hypothèse. On en déduit que $p(x) = q(x)$.

Correction exercice 4
Montrons que 1. $\Rightarrow$ 2.
On a : $f \circ f = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = g \circ f = f$. On obtient de manière similaire que $g \circ g = g$. Par conséquent f et g sont des projecteurs par l'exercice 1.
Soit $x \in Im(f)$. Puisque f est un projecteur on a $f(x) = x$. Par conséquent,

$$x = f(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Im(g)$$

dont on déduit que $Im(f) \subset Im(g)$.
Les applications f et g jouant des rôles symétriques dans les hypothèses, on a également $Im(g) \subset Im(f)$. D'où l'égalité $Im(g) = Im(f)$.

Montrons que 2. $\Rightarrow$ 1.
Soit $x \in E$. On a : $f(x) \in Im(f) = Im(g)$, d'où, puisque g est un projecteur : $g(f(x)) = f(x)$. On en déduit que $g \circ f = f$. On montre, de même, que $f \circ g = g$.

Correction exercice 5

1. *On a :*
$$q \circ q = (\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - 2p + p \circ p = \mathrm{Id}_E - p = q.$$
On en déduit que q est un projecteur par l'exercice 1.
2. *Montrons que L et M sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.*

   L'application nulle est dans L.

   Si $\lambda \in \mathbb{F}$ et $(f_1, f_2) \in L^2$, il existe $(u_1, u_2) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f_1 = u_1 \circ p$ et $f_2 = u_2 \circ p$. D'où $\lambda f_1 + f_2 = (\lambda u_1 + u_2) \circ p \in L$.
   On en déduit que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

   En appliquant ce résultat au projecteur q on obtient que M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

   Montrons que $L \oplus M = \mathcal{L}(E)$.
   Soit $f \in L \cap M$, il existe u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f = u \circ p = v \circ q$ d'où :

$$f = u \circ p = u \circ p \circ p = (u \circ p) \circ p = (v \circ q) \circ p = v \circ (q \circ p) = v \circ 0 = 0$$

   puisque $q \circ p = p - p \circ p = 0$.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $f = f \circ (p+q) = f \circ p + f \circ q$, d'où : $L + M = \mathcal{L}(E)$.

Correction exercice 6

1. *Si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors : $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2$, et donc $p+q$ est un projecteur.*

2. *Réciproquement, supposons que $p+q$ est un projecteur. On a :*

$$p+q=(p+q)^2=p^2+p\circ q+q\circ p+q^2=p+p\circ q+q\circ p+q,$$

d'où

$$p\circ q+q\circ p=0. \tag{1}$$

En composant cette relation par p à droite et à gauche on obtient les deux égalités :

$$p\circ q+p\circ q\circ p=0 \quad \text{et} \quad p\circ q\circ p+q\circ p=0.$$

En soustayant ces deux égalités on obtient :

$$p\circ q-q\circ p=0. \tag{2}$$

On déduit des égalités (1) *et* (2) *que* $p\circ q=q\circ p=0$.