EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Corrigé de la série 17

Correction exercice 1

1. *Cette forme n'est pas linéaire. En effet en a :*
$$\phi((2,1),(1,1)) = 2$$
alors que
$$\phi((1,0),(1,1)) + \phi((1,1),(1,1)) = 0 + 1 = 1.$$
Elle est symétrique et positive puisque
$$\phi((x,y),(x,y)) = |x|^2|y|^2 \geq 0.$$
Mais pas définie positive puisque $\phi((0,1),(0,1)) = 0$.
2. *Cette forme est bilinéaire, mais ni symétrique (en effet* $\phi((1,1),(1,0)) = 0$ *alors que* $\phi((1,0),(1,1)) = 2$*) ni positive puisque* $\phi((1,2),(1,2)) = -3$.
3. *On a :* $\phi(f,g) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3)$. *On vérifie que* ϕ *est bilinéaire et symétrique. Par contre* ϕ *n'est pas positive puisque* $\phi(x-4, x-4) = (2(x-4))(3) = -2$.
4. *La forme* ϕ *est linéaire en la première variable mais pas en la deuxième. En effet,* $\phi(x^2, x) = 6$ *alors que* $\phi(x^2, 2x) = 24$. *Elle n'est pas non plus positive car* $\phi(x^2 - 30, x^2 - 3) = (4x^3 - 120x)(3) < 0$.
5. *Cette forme est bilinéaire et symétrique mais n'est pas positive puisque* $\phi(X - \frac{1}{2}, X - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

Correction exercice 2

1. *On vérifie facilement que* ϕ *est bilinéaire et symétrique. Vérifions qu'elle est définie positive :*
$$\phi(P,P) = \sum_{k=0}^{2} P(k)^2 \geq 0$$
de plus, $\phi(P,P) = 0$ *si et seulement si* $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. *Le polynôme* P *a donc au moins trois racines mais comme il est de degré deux, on en déduit que* $P = 0$.
2. *On a*
$$||X-1||^2 = \phi(X-1, X-1) = \sum_{k=0}^{2}((X-1)(k))^2 = 1 + 0 + 1 = 2$$
et
$$||X^2+1||^2 = \phi(X^2+1, X^2+1) = \sum_{k=0}^{2}((X^2+1)(k))^2 = 1 + 2^2 + 5^2 = 30.$$
D'après l'inégalité triangulaire on a :
$$||(X-1) + (X^2+1)|| = ||X(X+1)|| \leq ||X-1|| + ||X^2+1|| = \sqrt{2} + \sqrt{3}0.$$

3. *Soit* $aX^2+bX+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *tel que* $aX^2+bX+c \in (span(1,X))^{\perp}$. *On a d'une part :*

$$\phi(aX^2+bX+c,1) = 0 = c+(a+b+c)+(4a+2b+c) = 5a+3b+3c$$

d'autre part :

$$\phi(aX^2+bX+c,X) = 0 = 0+(a+b+c)+2(4a+2b+c) = 9a+5b+3c.$$

On en déduit que $a=3c$ *et* $b=-6c$. *D'où* $(span(1,X))^{\perp} = span(3X^2-6X+1)$. *Comme* $6X-1 \in span(1,X)$ *on a que* $6X-1$ *et* $3X^2-6X+1$ *sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore nous donne :*

$$||3X^2-6X+1||^2 + ||6X-1||^2 = ||3X^2||^2 = 9||X^2||^2$$

or, $||X^2||^2 = \phi(X^2,X^2) = 0+1+2^4 = 17.$

Correction exercice 3

1. *On vérifie facilement que* ϕ *est bilinéaire et symétrique. Vérifions qu'elle est définie positive :*

$$\phi(f,f) = \int_0^{2\pi} f^2(t)dt \geq 0$$

car l'intégrale d'une fonction continue et positive est positive, de plus, $\phi(f,f)=0$ *si et seulement si* $f=0$.

2. *D'après l'inégalité triangulaire, on a :*

$$||1+\sqrt{t}|| \leq ||1|| + ||\sqrt{t}||$$

or, $||1||^2 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$ *et* $||\sqrt{t}||^2 = \int_0^{2\pi} t\ dt = 2\pi^2$. *D'où le résultat.*

3. *On a*

$$\phi(1,cos(x)) = \int_0^{2\pi} cos(t)dt = 0$$

d'où l'orthogonalité de 1 *et* $cos(x)$ *pour* ϕ. *On peut alors appliquer le théorème de Pythagore à ces deux vecteurs orthogonaux pour obtenir :*

$$||1+cos(x)||^2 = ||1||^2 + ||cos(x)||^2 = 2\pi+\pi = 3\pi$$

Remarque : $\int_0^{2\pi}(cos(t))^2dt$ *s'obtient en utilisant l'égalité* $(cos(t))^2 = \frac{1}{2}(1+cos(2t))$.

4. *L'inégalité de Cauchy Schwarz affirme que pour un produit scalaire* ϕ

$$|\phi(u,v)|^2 \leq ||u||^2||v||^2.$$

En prenant $u=cos(x)$ *et* $v=e^x$ *on obtient*

$$(\int_0^{2\pi} cos(t)e^t dt)^2 \leq \int_0^{2\pi} cos^2(t)dt \int_0^{2\pi} e^{2t}dt = \pi.\frac{(e^{4\pi}-1)}{2}$$

Correction exercice 4
On a

$$||u+v||^2 = \phi(u+v,u+v) = \phi(u,u)+\phi(u,v)+\phi(v,u)+\phi(v,v) = \phi(u,u)+2\phi(u,v)+\phi(v,v)$$

où la dernière égalité utilise le fait que V *est un espace vectoriel réel. De même :*

$$||u-v||^2 = \phi(u-v,u-v) = \phi(u,u)-\phi(u,v)-\phi(v,u)+\phi(v,v) = \phi(u,u)-2\phi(u,v)+\phi(v,v).$$

En faisant la différence entre ces deux égalités on obtient :

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\phi(u,v).$$

Correction exercice 5
On considère le produit scalaire suivant sur $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\phi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yy' + 3zz'$$

(les coefficients étant positifs c'est un produit scalaire d'après l'exemple donné dans le cours. On peut également le vérifier "à la main").
L'inégalité de Cauchy Schwarz affirme que pour un produit scalaire ϕ

$$|\phi(u,v)|^2 \leq ||u||^2||v||^2.$$

En prenant $u = (x,y,z)$ *et* $v = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ *on obtient :*

$$(x+y+z)^2 \leq ||(x,y,z)||^2||(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})||^2 = (x^2+2y^2+3z^2)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) \leq \frac{11}{6}.$$