EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Corrigé de la série 2

Correction exercice 1

- *Montrons que f est injective :*

$$\begin{aligned} f(x)=f(y) &\Rightarrow x^2-1=y^2-1 \\ &\Rightarrow x=\pm y \text{ où } x,y\in[1,+\infty[\text{ donc } x,y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x=y. \end{aligned}$$

- *Montrons que f est surjective : soit $y\in[0,+\infty[$. On cherche un élément $x\in[1,+\infty[$ tel que $y=f(x)=x^2-1$. Le réel $x=\sqrt{y+1}$ convient.*

Correction exercice 2

1. (a) $f([-3,-1])=[1,9]$,
   $f([-2,1])=[0,4]$,
   $f([-3,-1]\cup[-2,1])=f([-3,1])=[0,9]=f([-3,-1])\cup f([-2,1])$,
   $f([-3,-1]\cap[-2,1])=f([-2,-1])=[1,4]=f([-3,-1])\cap f([-2,1])$.

   (b) $f^{-1}(]-\infty,2])=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,
   $f^{-1}([1,\infty[)=]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$,
   $f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,\infty[)=f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}=f^{-1}(]-\infty,2])\cup f^{-1}([1,\infty[)$,
   $f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,\infty[)=f^{-1}([1,2])=[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]=f^{-1}(]-\infty,2])\cap f^{-1}([1,\infty[)$.

2. (a) *Montrons que $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$:*

$$\begin{array}{rcl} y\in f(A\cup B) & \Rightarrow & \exists x\in A\cup B \ t.q.\ f(x)=y \\ x\in A\cup B & \Rightarrow & x\in A \text{ ou } x\in B \\ x\in A & \Rightarrow & y=f(x)\in f(A) \\ x\in B & \Rightarrow & y=f(x)\in f(B) \\ & \Rightarrow & y\in f(A)\cup f(B). \end{array}$$

Réciproquement,

$$\begin{array}{rcl} y\in f(A)\cup f(B) & \Rightarrow & y\in f(A) \text{ ou } f\in f(B) \\ y\in f(A) & \Rightarrow & \exists x\in A \ t.q.\ f(x)=y \\ & \Rightarrow & \exists x\in A\cup B \ t.q.\ f(x)=y \\ & \Rightarrow & y\in f(A\cup B) \\ y\in f(B) & \Rightarrow & \exists x\in B \ t.q.\ f(x)=y \\ & \Rightarrow & \exists x\in A\cup B \ t.q.\ f(x)=y \\ & \Rightarrow & y\in f(A\cup B) \end{array}$$

Alors $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(b)

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A \cap B) & \Rightarrow & \exists x \in A \cap B \ t.q. \ f(x) = y \\ x \in A & \Rightarrow & y \in f(A) \\ x \in B & \Rightarrow & y \in f(B) \\ & \Rightarrow & y \in f(A) \cap f(B) \end{array}$$

Alors $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(c)

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A) \cap f(B) & \Rightarrow & \exists a \in A \ t.q. \ y = f(a) \ et \ \exists b \in B \ t.q. \ y = f(b) \\ f \ injective & \Rightarrow & a = b \\ a = b \in A \cap B & \Rightarrow & y \in f(A \cap B) \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(C \cup D) & \Leftrightarrow & f(x) \in C \cup D \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in C \ ou \ f(x) \in D \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \ ou \ x \in f^{-1}(D) \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \end{array}$$

alors $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(e)

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(C \cap D) & \Leftrightarrow & f(x) \in C \cap D \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in C \ et \ f(x) \in D \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \ et \ x \in f^{-1}(D) \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{array}$$

alors $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

3. *On peut prendre, par exemple,* $A = [-2, -1]$ *et* $B = [1, 2]$. *On a* $A \cap B = \emptyset$ *et* $f(A) = f(B) = [1, 4]$.

Correction exercice 3

1. *L'application* f *n'est pas injective car* $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$.
   L'application f *n'est pas surjective car* $y = 2$ *n'a pas d'antécédent : en effet l'équation* $f(x) = 2$ *devient* $2x = 2(1 + x^2)$ *soit* $x^2 - x + 1 = 0$ *qui n'a pas de solutions réelles* ($\Delta = -3$).
2. *On cherche à déterminer l'ensemble des* y *tel qu'il existe* $x \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $f(x) = y$. *Cette égalité est équivalente à l'équation* $yx^2 - 2x + y = 0$ *qui a des solutions* x *réelles si et seulement si* $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$. *Par conséquent, il y a des solutions si et seulement si* $y \in [-1, 1]$ *et donc* $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. *On a* $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, *donc* f' *est strictement positive sur* $]-1, 1[$. *Par conséquent, l'application* f *est strictement croissante sur* $[-1, 1]$ *avec* $f(-1) = -1$ *et* $f(1) = 1$. *On en déduit que la restriction de* f *de* $[-1, 1]$ *à* $[-1, 1]$ *est une bijection.*

Soit $y \in [-1,1]$ alors, d'après le (2), les solutions x possibles de l'équation $f(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. En effet, $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Donc $f : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ a pour application réciproque $h : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ définie par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Correction exercice 4

1. *Supposons que $g \circ f$ est injective, et montrons que f est injective : soient $a,\ a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$, alors, en composant par g, on a : $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Or, $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Par conséquent, f est injective.*
2. *Supposons que $g \circ f$ est surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$. Par conséquent, g est surjective.*
3. *Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective en tant que composée d'applications bijectives. De même avec $h \circ g$.*
   Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point g est surjective.
   Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
   Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction exercice 5

1. *Soit $B \subset Y$, rappellons que par définition, $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.*
   Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Alors $y \in B$ et $y \in f(X)$ d'où $y \in B \cap f(X)$.
   Réciproquement, soit $y \in B \cap f(X)$. Puisque $y \in f(X)$, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Comme $y = f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.
2. *Si f est surjective, $f(X) = Y$ donc, par le point 1. :*
   $$\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) = B \cap Y = B.$$
   Réciproquement, supposons que $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$. Soit $y \in Y$ et $B = \{y\}$, on a $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\} \neq \emptyset$. Par conséquent, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ et donc y admet des antécédents par f.
3. *Par définition,*
   $$f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}.$$
   On commence donc par remarquer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   Supposons que f est injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$ alors $f(x) \in f(A)$ et donc, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme f est injective, on en déduit que $x = a \in A$ et donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
   Réciproquement, supposons que $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$. Soient x et x' dans X tels que $f(x) = f(x')$. Pour $A = \{x\}$ on a, par hypothèse, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$. Or, $x' \in f^{-1}(f(\{x\}))$ puisque $f(x') = f(x) \in f(\{x\})$. Par conséquent, $x' = x$.

Correction exercice 6

Montrons que la restriction de f à $[0, 2\pi[$, que l'on notera $\bar{f}$, est une bijection de $[0, 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$, où $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation $(|z| = 1)$.

- *L'application $\bar{f}$ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$, représenté par un point M dans le plan, s'écrit sous la forme $cos(t) + i.sin(t)$ où t est l'angle entre l'axe des abscisses et le vecteur $\vec{OM}$. De plus, on peut choisir $t \in [0, 2\pi[$. (Rappellons que $cos^2(t) + sin^2(t) = 1$.)*
- *L'application $\bar{f}$ est injective car :*

  $$\begin{aligned} \bar{f}(t) = \bar{f}(t') \quad &\Leftrightarrow cos(t) + i.sin(t) = cos(t') + i.sin(t') \\ &\Leftrightarrow cos(t) = cos(t') \text{ et } sin(t) = sin(t'). \end{aligned}$$

  La première égalité équivaut à : $t = t' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou *$t = -t' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,*
  et la seconde équivaut à : $t = t' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou *$t = \pi - t' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*
  Par conséquent, les deux égalités sont satisfaites si et seulement si $t = t' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Comme $t, t' \in [0, 2\pi[$ on a $k = 0$ et donc $t = t'$ ce qui prouve l'injectivité de $\bar{f}$.

En conclusion $\bar{f}$ est injective et surjective donc bijective.

Correction exercice 7

Raisonnons par contraposée, c'est à dire montrons que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.
Soit $x \in f(A) \cap f(B)$, alors il existe $x \in A$ tel que $x = f(a)$ et il existe $b \in B$ tel que $x = f(b)$. Par conséquent, $x = f(a) = f(b)$. Comme f est injective, on en déduit que $a = b \in A \cap B$, ce qui prouve que $A \cap B \neq \emptyset$.
(On aurait également pu faire un raisonnement pas l'absurde, c'est à dire, supposer que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ et montrer que cela entraîne une contradiction avec $A \cap B = \emptyset$.)