EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Corrigé du travail écrit d'algèbre linéaire du 3 mai 2007

Correction exercice 1
Voir l'exercice 5 de la série 14.

Correction exercice 2
On considère $\mathbb{F}^4$ muni du produit scalaire euclidien.
Soit $F = Span\{(1,1,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\} \subset \mathbb{F}^4$. On projette orthogonalement le vecteur $(0,1,-1,0)$ sur F. Le théorème de meilleure approximation nous donne

$$||(0,1,-1,0) - proj_F(0,1,-1,0)|| \leq ||(0,1,-1,0)-(x,x+y,x+z,z)|| = \sqrt{N(x,y,z)} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Il reste donc à calculer $proj_F(0,1,-1,0)$, ce qui est laissé au lecteur.

Correction exercice 3

- *(a) NON*
  En utilisant le fait que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale on a
  $$\int_0^1 p(x)\bar{q}(x)dx = ||p_1||^2 - 2||p_2||^2 + 3||p_3||^2 - 4||p_4||^2 + 5||p_5||^2$$
  $\mathcal{B}$ étant, de plus supposée orthonormée on obtient
  $$\int_0^1 p(x)\bar{q}(x)dx = 3.$$
- *(b) NON*
  Le polynôme caractéristique de la matrice donnée dans l'énoncé est
  $$\chi(X) = (X+2)X(X-4)(X+1)$$
  On en déduit que 1 n'est pas valeur propre de T et donc qu'il n'existe pas de $\vec{v} \in V$, NON-NUL, tel que $T(\vec{v}) = \vec{v}$.
  (Sans la condition "non-nul" la réponse est affirmative en considérant le vecteur nul)
- *(c) NON*
  Les hypothèses de l'énoncé se récrivent :
  $$\forall \vec{v} \in V; \quad T \circ S_1(\vec{v}) = S_1(\vec{v}); \quad T \circ S_2(\vec{v}) = 0; \quad T \circ S_3(\vec{v}) = -S_3(\vec{v}).$$
  (Ce qui signifie que $-1, 0$ et 1 sont des valeurs propres de T.)
  Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que
  $$\forall \vec{v} \in V; \quad \alpha_1 S_1(\vec{v}) + \alpha_2 S_2(\vec{v}) + \alpha_3 S_3(\vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

En appliquant T puis T^2 à cette égalité et en utilisant les hypothèses on obtient

$$\forall \vec{v} \in V; \quad \alpha_1 S_1(\vec{v}) - \alpha_3 S_3(\vec{v}) = 0 \qquad (2)$$

$$\forall \vec{v} \in V; \quad \alpha_1 S_1(\vec{v}) + \alpha_3 S_3(\vec{v}) = 0 \qquad (3)$$

On déduit de ces trois égalités que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Correction exercice 4

Voir le cours.