EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2007-2008

Corrigé de la série 20

Exercice 1. Comme A est symétrique, le théorème spectral nous garantie qu'une base de la forme requise existe.

Pour la trouver, déterminons d'abord les valeurs propres de $T = T_A$. Pour cela, supposons que $\lambda \in \operatorname{spec}(T)$, i.e. $Tv = \lambda v$ pour un $v \neq 0$. De manière équivalente, l'opérateur $T - \lambda \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injectif, ce qui se passe si et seulement si $\det([T - \lambda \operatorname{id}]_{\mathcal{B}}) = 0$, où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Prenant pour $\mathcal{B}$ la base standard, on obtient :

$$\begin{aligned}
\det([T - \lambda \operatorname{id}]_{\mathcal{B}}) &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{C1-C2}{=} \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -1 & 2 \\ -6+\lambda & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{L1+L2}{=} \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{C3+2C2}{=} \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 2(6-\lambda) \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2(6-\lambda) \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \overset{L1-2L2}{=} (6-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(6-\lambda)^2 \lambda.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc 6 et 0. Pour trouver l'espace propre V_0 de 0, on applique l'algorithme de Gauss–Jordan :

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent : $V_0 = \operatorname{span}((1,1,-2))$ et $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ est un vecteur propre orthonormée.

Pour V_6, c'est plus facile :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $V_6 = \{(-\alpha + 2\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}((1,-1,0),(1,1,1))$. Une base orthonormée de V_6 est donnée par $(v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1))$.

La liste (u,v,w) est donc une base de $\mathbb{R}^3$ de la forme cherchée et

$$[T]_{(u,v,w)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, T est la projection orthogonale sur le plan $\operatorname{span}(v,w)$ suivie d'une homothétie de rapport 6.

Exercice 2. Démonstration par récurrence. Évident pour $k = 1$. Supposons que $(T^{k-1})^* = (T^*)^{k-1}$. Alors $(T^k)^* = (T^{k-1}T)^* = T^*(T^{k-1})^* = T^*(T^*)^{k-1} = (T^*)^k$, ce qui termine l'étape de récurrence.

Exercice 3. (a) Pour les noyaux : Pour tout $v \in V$, $\|Tv\| = \|T^*v\|$. Alors $\|Tv\| = 0 \Leftrightarrow \|T^*v\| = 0$. Par conséquent, $Tv = 0 \Leftrightarrow T^*v = 0$. Donc $\ker T = \ker T^*$.
Pour les images : $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp = (\ker T^*)^\perp = \operatorname{im} T$.

(b) On procède par récurrence. Pour $k = 1$ c'est la définition d'opérateur normal. Supposons, pour un certain $k \geq 2$, que T^* commute avec T^{k-1}, c.-à-d. que $T^*T^{k-1} = T^{k-1}T^*$. Alors $T^*T^k = T^*T^{k-1}T = T^{k-1}T^*T = T^{k-1}TT^* = T^kT^*$, ce qui termine la récurrence.

(c) La preuve est par récurrence. Pour $k = 1$ c'est l'hypothèse. Supposons que T^{k-1} est normal, $k \geq 2$. Alors $(T^k)^*T^k = (T^{k-1}T)^*T^{k-1}T = T^*(T^{k-1})^*T^{k-1}T = T^*T^{k-1}(T^{k-1})^*T = T^{k-1}T^*(T^*)^{k-1}T = T^{k-1}T^*T(T^*)^{k-1} = T^{k-1}TT^*(T^*)^{k-1} = T^k(T^*)^k = T^k(T^k)^*$, où on a utilisé les exercices 3.(b) et 2.

(d) Tout d'abord, le noyau. On utilise la récurrence. Si $k = 1$ c'est évident. Supposons, pour un certain $k > 1$, que $\ker T^{k-1} = \ker T$. Soit $v \in \ker T$. Donc $Tv = 0$, d'où $T^kv = T^{k-1}(Tv) = 0$, alors $v \in \ker T^k$. Par conséquent, $\ker T \subseteq \ker T^k$. Réciproquement, supposons que $v \in \ker T^k$. Alors $T(T^{k-1}v) = 0$, donc $T^{k-1}v \in \ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp = (\operatorname{im} T)^\perp$, en utilisant (a) et le fait que T est normal. Or, $k - 1 > 0$, alors $T^{k-1}v \in \operatorname{im} T$. Donc $T^{k-1}v \in \operatorname{im} T \cap (\operatorname{im} T)^\perp = 0$. Par conséquent, $T^{k-1}v = 0$, c.-à-d. que $v \in \ker T^{k-1} = \ker T$ par hypothèse, ce qui termine l'étape de récurrence.
Ensuite, l'image. Soit $k \geq 1$. $T^kv = T(T^{k-1}v)$ alors $\operatorname{im} T^k \subseteq \operatorname{im} T$. Réciproquement, on considère Tv ; il faut montrer qu'il existe $u \in V$ tel que $Tv = T^ku$. Or, $V = \operatorname{im} T^{k-1} \oplus (\operatorname{im} T^{k-1})^\perp$. Mais $(\operatorname{im} T^{k-1})^\perp = \ker(T^{k-1})^*$. Selon l'exercice 3.(c), T^{k-1} est normal. Donc, par 3.(a), $(\operatorname{im} T^{k-1})^\perp = \ker T^{k-1}$. De plus, $\ker T^{k-1} = \ker T$ par la première partie de cet exercice. Alors, on peut écrire $v \in V$ sous la forme $v = T^{k-1}u + w$, où $u \in V$ et $w \in \ker T$. Donc $Tv = T(T^{k-1}u + w) = T^ku$.

Exercice 4. Supposons que T existe. Par hypothèse, $(1, 2, 3)$ et $(2, 5, 7)$ sont alors des vecteurs propres de 0 et 1, respectivement. Comme T est supposé auto-adjoint, il est normal. Alors les vecteurs propres des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Mais $\langle (1, 2, 3), (2, 5, 7) \rangle = 33 \neq 0$. Contradiction ! Donc un tel opérateur T n'existe pas.

Exercice 5. Ecrivons $T = T_{A+iB}$. Rappelons que T^* est représenté par la matrice $(A + iB)^*$. De plus, nous avons $(A + iB)^* = A^* + (iB)^* = A - iB^* = A - iB$, comme A,B sont réelles et symétriques. Alors :

$$\begin{aligned}
TT^* = T^*T \quad &\Leftrightarrow \quad (A + iB)(A + iB)^* = (A + iB)^*(A + iB) \\
&\Leftrightarrow \quad (A + iB)(A - iB) = (A - iB)(A + iB) \\
&\Leftrightarrow \quad A^2 + iBA - iAB + B^2 = A^2 - iBA + iAB + B^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2i(BA - AB) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA.
\end{aligned}$$

Exercice 6. Puisque T est normal, il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de V de vecteurs propres de T. On pose $Te_i = \lambda_i e_i$. Pour tout i, il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$. On définit $S \in \mathcal{L}(V)$ par $Se_i = \mu_i e_i$ pour tout i. Donc $(S \circ S)e_i = S(Se_i) = S(\mu_i e_i) = \mu_i Se_i = \mu_i^2 e_i = \lambda_i e_i = Te_i$. Par conséquent, $T = S \circ S$.

Remarquons que cette preuve marche pour n'importe quel opérateur diagonalisable ; on n'a pas utilisé le fait que la base est orthonormale.

Exercice 7. Si U est muni d'un produit scalaire par rapport auquel T est auto-adjoint, alors le théorème spectral réel nous dit qu'il existe une base B de U de vecteurs propres de T.

Réciproquement, supposons qu'il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de U telle que $Tv_i = \lambda_i v_i$ pour tout i. Nous construisons un produit scalaire tel que cette base est en fait orthonormale. On définit $\langle v_i, v_j \rangle = 1$ si $i = j$, 0 sinon. Ceci détermine une forme bilinéaire $\langle \ , \ \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$. Supposons que $u \in U$. On écrit $u = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$. Donc $\langle u, u \rangle = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$, et $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, c.-à-d. si $u = 0$. Donc on a bel et bien défini un produit scalaire sur U. Or, si $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ et $w = \sum_{j=1}^n b_i v_i$, alors $\langle Tu, v \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle Tv_i, v_j \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \lambda_i$. Pareillement, $\langle u, Tw \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \lambda_i = \langle Tu, w \rangle$. Donc T est auto-adjoint.

Exercice 8.

(a) On procède comme dans l'exercice 6 : Par le théorème spectral réel, il existe une base orthonormée de V de vecteurs propres de R, $(e_1, \dots, e_n)$, où $n = \dim(V)$. Soient $Re_i = \lambda_i e_i$. On définit $S \colon V \to V$ par $S(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$.

Pour montrer l'unicité de S, supposons que $\bar{S}$ soit un autre opérateur auto-adjoint avec $\bar{S}^2 = R$. Appliqué à $\bar{S}$, le théorème spectral réel dit qu'il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ orthonormée de V, formée de vecteurs propres de $\bar{S}$. Soient $\bar{S} f_i = \mu_i f_i$. Alors $Rf_i = \bar{S}^2 f_i = \mu_i^2 f_i$. Il faut donc que $\{\mu_1^2, \dots, \mu_n^2\}$ soit le spectre $\mathrm{spec}(R) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de R et que $(f_1, \dots, f_n)$ soient des vecteurs propres de R. Plus précisément, f_i est un vecteur propre de R associée à la valeur propre μ_i^2. Cela implique que $\bar{S} = S$.

(b) Soit v un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \mathrm{spec}(T^*T)$. Alors $\langle T^*Tv, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 > 0$, comme T est bijectif. D'un autre côté : $\langle T^*Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$. Comme $\|v\|^2 > 0$, il s'ensuit que $\lambda > 0$.

(c) Comme l'opérateur S est auto-adjoint, il est diagonalisable. Le déterminant d'une matrice qui représente S, par rapport à n'importe quel base de V, est alors le produit des valeurs propres. Celles-ci sont toutes positives et donc le déterminant l'est aussi. En particulier, il n'est pas nul, ce qui signifie que S est inversible.

Pour voir que U est orthogonal, calculons $\langle Uv, Uw \rangle$ pour $v, w \in V$:

$$\langle Uv, Uw \rangle = \langle TS^{-1}v, TS^{-1}w \rangle = \langle T^*TS^{-1}v, S^{-1}w \rangle = \langle Sv, S^{-1}w \rangle = \langle v, SS^{-1}w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Pour montrer l'unicité, supposons que $T = \bar{U}\bar{S}$, avec $\bar{U}$ orthogonal et $\bar{S}$ auto-adjoint et défini positif.

Remarquons que $\bar{U}$ est inversible, en tant qu'opérateur orthogonal : Si $v \in V - \{0\}$, alors $\|\bar{U}v\| = \langle \bar{U}v, \bar{U}v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$. De plus, on a $\bar{U}^{-1} = \bar{U}^*$: Pour $v \in V$ on a

$$\langle \bar{U}^*\bar{U}v - v, w \rangle = \langle \bar{U}v, \bar{U}w \rangle - \langle v, w \rangle = 0$$

pour tout $w \in V$. Par conséquent $\bar{U}^*(\bar{U}v) = v \ \forall v \in V$ et donc $\bar{U}^* = \bar{U}^{-1}$.

On déduit de cela que $\bar{S} = \bar{U}^*T$. Mais $\bar{S} = \bar{S}^*$ et alors $\bar{S} = (\bar{U}^*T)^* = T^*\bar{U}$. Par conséquent : $\bar{S}^2 = (T^*\bar{U})(\bar{U}^*T) = T^*T$. Par le (a), cela implique que $\bar{S} = S$. Donc $\bar{U}S = US$. Comme S est inversible, cela donne $\bar{U} = U$ également.