EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2009-2010

Corrigé de la série 23

Exercice 1. 1. L'adjoint de T est donné par $T^* = (-T^*T)^* = -(T^*T)^* = -T^*T = T$, donc T est auto-adjoint. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(T)$ et $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$, donc $Tv = \lambda v$. Appliquer $T^* = T$ aux deux côtés donne $-Tv = \lambda^2 v$. Par conséquence, $(\lambda + \lambda^2)v = 0$, et donc $\lambda(\lambda+1) = 0$. Il s'ensuit que $\lambda = 0$ ou bien $\lambda = -1$.

2. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors $T_B(e_i)$ est la i-ème colonne de la matrice $i \cdot A$. Donc on a $T_B(e_i) = iT_A(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n$, et donc $T_B = iT_A$.

   On obtient par conséquent $T_B^* = (iT_A)^* = \bar{i}T_A^* = -iT_{A^*} = -iT_{-A} = iT_A = T_B$. Donc T_B est auto-adjoint, et ses valeurs propres sont donc forcément toutes réelles.

   Nous montrons maintenant que $\mathrm{Spec}(T_A) = -i\,\mathrm{Spec}(T_B)$, ce qui impliquera que $\mathrm{Spec}(T_A) \subseteq -i\mathbb{R} = i\mathbb{R}$.

   Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(T_B)$. Il existe alors $v \in \mathbb{C}^n$ non-nul tel que $T_B(v) = \lambda v$. On obtient alors $T_A(v) = -iT_B(v) = -i\lambda v$, donc $-i\lambda \in \mathrm{Spec}(T_A)$. De même, si $T_A(v) = \lambda v$ pour un $v \in \mathbb{C}^n$ non-nul, alors $T_B(v) = iT_A(v) = i\lambda v$. Comme on a $\lambda = -i \cdot i\lambda$, on a montré que $\mathrm{Spec}(T_A) = -i\,\mathrm{Spec}(T_B)$.

3. Ecrivons $T = T_{A+iB}$. Rappelons que T^* est représenté par la matrice $(A+iB)^*$. De plus, nous avons $(A+iB)^* = A^* + (iB)^* = A - iB^* = A - iB$, comme A, B sont réelles et symétriques. On en déduit :

$$\begin{aligned}
TT^* = T^*T \quad &\Leftrightarrow \quad (A+iB)(A+iB)^* = (A+iB)^*(A+iB) \\
&\Leftrightarrow \quad (A+iB)(A-iB) = (A-iB)(A+iB) \\
&\Leftrightarrow \quad A^2 + iBA - iAB + B^2 = A^2 - iBA + iAB + B^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2i(BA - AB) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA.
\end{aligned}$$

Exercice 2. 1. Pour les noyaux : Pour tout $v \in V$, $\|Tv\| = \|T^*v\|$. Alors $\|Tv\| = 0 \Leftrightarrow \|T^*v\| = 0$. Par conséquent, $Tv = 0 \Leftrightarrow T^*v = 0$. Donc $\ker T = \ker T^*$.

   Pour les images : $\mathrm{im}\, T^* = (\ker T)^\perp = (\ker T^*)^\perp = \mathrm{im}\, T$.

2. On procède par récurrence. Pour $k = 1$ c'est la définition d'opérateur normal. Supposons, pour un certain $k \geq 2$, que T^* commute avec T^{k-1}, c'est-à-dire que $T^*T^{k-1} = T^{k-1}T^*$. Alors $T^*T^k = T^*T^{k-1}T = T^{k-1}T^*T = T^{k-1}TT^* = T^kT^*$, ce qui termine la récurrence.

   On sait par la proposition 9.1 du polycopié que $(T^*)^* = T$, donc T est normal si et seulement si T^* est normal. En appliquant le résultat ci-dessus à T^*, on obtient $(T^*)^k\, T^{**} = T^{**}\,(T^*)^k$ et donc $(T^*)^k\, T = T\,(T^*)^k$.

3. On fait une preuve par récurrence. Pour $k = 1$ c'est l'hypothèse. Supposons que T^{k-1} est normal, $k \geq 2$. Alors $(T^k)^*T^k = (T^{k-1}T)^*T^{k-1}T = T^*(T^{k-1})^*T^{k-1}T = T^*T^{k-1}(T^{k-1})^*T = T^{k-1}T^*(T^*)^{k-1}T = T^{k-1}T^*T(T^*)^{k-1} = T^{k-1}TT^*(T^*)^{k-1} = T^k(T^*)^k = T^k(T^k)^*$, où on a utilisé les résultats de la question précédente.

4. Pour le noyau, on fait une preuve par récurrence. Si $k = 1$, il n'y a rien à faire. Supposons que pour un certain $k > 1$, $\ker T^{k-1} = \ker T$. Soit $v \in \ker T$. Donc $Tv = 0$, d'où $T^kv =$

$T^{k-1}(Tv) = 0$, et $v \in \ker T^k$. Par conséquent, $\ker T \subseteq \ker T^k$. Réciproquement, supposons que $v \in \ker T^k$. Alors $T(T^{k-1}v) = 0$, donc $T^{k-1}v \in \ker T = (\operatorname{im} T^*)^\perp = (\operatorname{im} T)^\perp$, en utilisant le résultat de la question 1. et le fait que T est normal. Comme $k - 1 > 0$, on a $k - 2 \geq 0$ et on peut écrire $T^{k-1}v = T(T^{k-2}(v)) \in \operatorname{im} T$. Donc $T^{k-1}v \in \operatorname{im} T \cap (\operatorname{im} T)^\perp = \{0\}$. Par conséquent, $T^{k-1}v = 0$, donc $v \in \ker T^{k-1} = \ker T$ par hypothèse, ce qui termine l'étape de récurrence.

On montre maintenant que $\operatorname{im}(T^k) = \operatorname{im}(T)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $k \geq 1$. D'après la définition d'un opérateur normal, T est normal si et seulement si T^* est normal. On a alors

$$\operatorname{im}(T^k) = (\ker((T^k)^*))^\perp = (\ker((T^*)^k))^\perp = (\ker(T^*))^\perp = \operatorname{im}(T).$$

On a utilisé l'égalité $(T^k)^* = (T^*)^k$ qui est vraie pour tout k car, d'après le cours $(S \circ R)^* = R^* \circ S^*$ pour tout $R, S \in \mathcal{L}(V)$, ainsi que la première partie de cette question.

Exercice 3. 1. D'après l'exercice 6 de la série 22, on sait qu'il existe un vecteur propre $u' \neq 0$ de T pour une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $u = u'/\|u'\|$ est un multiple de u' de norme 1, c'est donc aussi un vecteur propre de T pour la valeur propre λ. On pose $U = \operatorname{span}(u)$. Soit $v \in U^\perp$. On a

$$\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0,$$

ce qui montre que $T(v) \in U^\perp$. $U^\perp$ est donc T-invariant.

2. On peut donc considérer $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$. L'espace vectoriel $U^\perp$ est muni du produit scalaire défini par la restriction à $U^\perp$ du produit scalaire sur V. On a, pour tout $v, w \in U^\perp$:

$$\langle T|_{U^\perp}(v), w \rangle_{U^\perp} = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle = \langle v, T|_{U^\perp}(w) \rangle_{U^\perp}.$$

L'opérateur $T|_{U^\perp}$ est donc auto-adjoint d'après la caractérisation de l'adjoint.

3. Soit $n = 1$. Alors $T = \lambda \operatorname{Id}_V$. Chaque base orthonormale de V est composée d'un unique vecteur normé. Ce vecteur est automatiquement un vecteur propre de T pour la valeur propre λ.

On admet que l'assertion à démontrer est vraie pour tout espace vectoriel réel V' de dimension $n - 1$ et tout opérateur T' auto-adjoint de V'. Soit λ une valeur propre réelle de T (qui existe d'après l'exercice 6 de la série 22) et u un vecteur propre normé de T pour la valeur propre λ. On considère $U := \operatorname{span}(u)$. Comme $\dim U^\perp = n - 1$ et $T' := T|_{U^\perp}$ est un élément auto-adjoint de $\mathcal{L}(U^\perp)$ d'après la question précédente, il existe d'après l'hypothèse de récurrence une base $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ de $U^\perp$ formée de vecteurs propres de $T|_{U^\perp}$. Comme les vecteurs $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont des vecteurs propres de $T|_{U^\perp}$, ils sont aussi des vecteurs propres de T. La liste $(u, u_1, \ldots, u_{n-1})$ est donc une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de T.

Exercice 4. 1. Soit $V = \mathbb{R}^2$ et T l'opérateur ayant la matrice $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$. (Cet opérateur n'est donc pas auto-adjoint.) Soit $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Alors $\alpha^2 < 4\beta$ et

$$[T^2 + \alpha T + \beta \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}} = [T^2 + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$T^2 + \alpha T + \beta \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$ est donc l'opérateur nul et par conséquent non inversible.

2. Soit $V = \mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire standard et S l'opérateur ayant la matrice $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$. Soit $U = \text{span}(e_1)$. Alors U est S-invariant puisque $S(e_1) = 0$. On a $U^\perp = \text{span}(e_2)$ et $U^\perp$ n'est donc pas S-invariant puisque $S(e_2) = e_1$.

3. Soit $S, T \in \mathcal{L}(V)$ des opérateurs normaux. Alors

$$(S+T)(S+T)^* = (S+T)(S^* + T^*) = SS^* + TT^* + ST^* + TS^*$$

et

$$(S+T)^*(S+T) = (S^* + T^*)(S+T) = S^*S + T^*T + S^*T + T^*S.$$

Donc, comme $SS^* = S^*S$ et $TT^* = T^*T$, on a l'égalité $(S+T)(S+T)^* = (S+T)^*(S+T)$ si et seulement si $ST^* + TS^* = S^*T + T^*S$.

Prenons $V = \mathbb{F}^2$ muni du produit scalaire standard. Soit $\mathcal{B}$ la base standard de $\mathbb{F}^2$ et $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ tels que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =: A$ et $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: B$. Ces deux opérateurs sont normaux (S est auto-adjoint et T a la forme trouvée dans l'exercice 4 de la série 22 pour un opérateur normal non auto-adjoint réel, qui est aussi normal si on le considère comme un opérateur complexe) et on a

$$[ST^*+TS^*]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$[S^*T+T^*S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2) \mid T \text{ normal}\}$ n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ car la somme de deux opérateurs normaux n'est pas forcément un opérateur normal.

On peut généraliser cet exemple à n'importe quel espace vectoriel V de dimension $n \geq 2$ en prenant des opérateurs normaux $S, T \in \mathcal{L}(V)$ ayant, dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de V, les matrices en blocs suivantes :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. 1. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de U, qu'on complète en une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ de V. La matrice de T dans cette base a la forme

$$M := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

avec $A \in \text{Mat}(m, \mathbb{R})$, $B \in \text{Mat}(n-m, m, \mathbb{R})$ et $C \in \text{Mat}(n-m, \mathbb{R})$. On a utilisé le fait que U est T-invariant, donc que $T(e_i) \in \text{span}(e_1, \ldots, e_m)$ pour $i = 1, \ldots, m$. On appelle m_{ij} les coefficients de la matrice M, $i, j = 1, \ldots, n$. Pour $i = 1, \ldots, m$, on a

$$\|T(e_i)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{m} m_{ji} e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|m_{ji} e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} m_{ji}^2.$$

On obtient donc
$$\sum_{i=1}^{m} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} m_{ji}^2.$$
Comme $[T^*]_{\mathcal{B}} = M^*$, on a également
$$\|T^*(e_i)\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{n} m_{ij}e_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|m_{ij}e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2.$$
On obtient donc
$$\sum_{i=1}^{m} \|T^*(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2.$$
Mais comme T est normal, on a $\|T^*(e_i)\| = \|T(e_i)\|$ pour $i = 1, \dots, m$. Cela donne
$$\sum_{i=1}^{m} \|T(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|T^*(e_i)\|^2,$$
et donc
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} m_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}^2$$
en échangeant les indices dans la deuxième somme. On obtient donc
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{n} m_{ij}^2 = 0.$$
Comme ce nombre est la somme des carrés des coefficients (réels !) de B, on a montré que $B = 0$. La matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}$ est donc de la forme
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$
Cela implique que $T(e_i) \in \operatorname{span}(e_{m+1}, \dots, e_n)$ pour $i = m+1, \dots, n$. Comme $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ est une base de $U^\perp$, on a donc prouvé que $U^\perp$ est T-invariant.

2. On obtient de la question précédente que
$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A^t & 0 \\ 0 & C^t \end{bmatrix}.$$
Le sous-espace vectoriel U est donc T^*-invariant.

3. Soit $S := T|_U \in \mathcal{L}(U)$. Soient $u, u' \in U$. On calcule $\langle S(u), u'\rangle_U = \langle T(u), u'\rangle_V = \langle u, T^*(u')\rangle_V = \langle u, T^*(u')\rangle_U$, comme $T^*(U) \subseteq U$. On a donc $S^*(u') = T^*(u')$ pour tout $u' \in U$ d'après la caractérisation de l'adjoint. Cela montre que $S^* = T^*|_U \in \mathcal{L}(U)$.

4. On a pour tout $u \in U$:
$$(T|_U \circ T^*|_U)(u) = T|_U(T^*(u)) = T(T^*(u)) = T^*(T(u)) = (T^*|_U \circ T|_U)(u),$$
où on a utilisé le fait que T est normal. L'opérateur $T|_U$ est donc normal.

5. On a montré dans le point précédent que la restriction de T à un sous-espace T-invariant de V est normal. Comme $U^\perp$ est T-invariant d'après le point 1, on peut appliquer ce résultat à $U^\perp$.