Vers une théorie générale d'extensions homotopiques de Hopf-Galois

Cédric Bujard

22 août 2006

But : Un premier pas vers une généralisation de la théorie de Galois des anneaux commutatifs au contexte beaucoup plus général des catégories modèles monoïdales.

Idée : Le problème est le suivant : Soit $f : A \hookrightarrow B$ une extension d'anneaux commutatifs, et soit G un sous-groupe fini de

$$\{g : B \to B \mid g \text{ est un homomorphisme de } A\text{-algebres}\},$$

où B est muni de la structure de A-algèbre induite par f. Ceci donne lieu à deux applications

- $i : A \hookrightarrow B^G$ défini comme l'inclusion de A dans l'anneau B^G des points fixes de B par G,
- $h : B \otimes_A B \to \prod_G B$ défini comme l'homomorphisme d'anneaux commutatifs spécifié par

  $$h(x \otimes y) := (x \cdot g(y))_{g \in G},$$

  où $\prod_G B$ est l'ensemble de toutes les suites $(x_g)_{g \in G}$ de B,

qui sont telles que $f : A \hookrightarrow B$ devient une G-extension de Galois d'anneaux commutatifs si et seulement si les applications i et h sont bijectives. On aimerait pouvoir étendre ce fait au cas où $f : A \to B$ devient un morphisme de monoïdes commutatifs dans une catégorie modèle monoïdale symmétrique fermée $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, et où le groupe G devient un monoïde de Hopf commutatif de $\mathcal{C}$.

Procédure : Une fois que les bases nécessaires de la théorie de Galois pour les anneaux commutatifs et des catégories modèles monoïdales ont été établies, la première difficulté est de savoir ce que deviennent les application i et h dans ce nouveau contexte, et comment le monoïde G doit agir sur A et B. A partir de là, en utilisant la structure de catégorie modèle de $\mathcal{C}$, on peut ensuite généraliser la notion d'extension de Galois au cas où i et h deviennent des equivalences faibles. Ceci permet ainsi de définir, de façon appropriée, la notion plus générale d'extension homotopique de Hopf-Galois. La stratégie est ensuite de pouvoir établir différentes propriétés qui généralisent certains des résultats donnés par J. Rognes dans [2] pour le cas des spectres, et par S.U. Chase dans [1] pour le cas des anneaux commutatifs et, ceci faisant, tout en s'approchant de pouvoir démontrer un théorème de correspondance homotopique de Hopf-Galois qui généraliserait celui déjà existant pour le cas des anneaux commutatifs.

Bibliographie :

[1] S.U. Chase, D.K. Harrison, A. Rosenberg, *Galois theory and cohomology of commutative rings*, American Mathematical Society, 1965.

[2] John Rognes, *Galois extensions of structured ring spectra*, arXiv, 2005.