Corrigé 18 du mercredi 15 mars 2017

Exercice 1.

Exercice 2.

1.) Commençons par appliquer le critère de d'Alembert sur les séries numériques. Si on calcule, à x fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \cdot \frac{(3n)!}{|x|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0.$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série est $R = \infty$. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ définit donc une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (résultat 2, p. 82) et on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\, x^{3n-1}}{(3n)!} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(3n-1)x^{3n-2}}{(3n)!}.$$

Les séries dérivées héritent du rayon de convergence ($R = \infty$). On obtient ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}.$$

Il s'ensuit donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, chacune des trois séries entières converge absolument et on a:

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

2.) On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Ainsi $f(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(P) \qquad \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t) = e^t$$

avec les conditions initiales $u(0) = 1$ et $\dot{u}(0) = 0$ (c'est-à-dire $u(t) = f(t)$).
Calculons la solution générale de l'équation sans second membre

$$\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t) = 0$$

d'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Puisque le discriminant de cette équation vaut $1 - 4 = -3$, on obtient :

$$u(t) = c_1\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

On vérifie immédiatement que $\frac{1}{3}\, e^t$ est une solution particulière de (P), ce qui implique qu'une solution générale de (P) est donnée par

$$u(t) = c_1\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}\, e^t.$$

En posant $u(0) = 1$ et $\dot{u}(0) = 0$, on obtient $c_1 = \frac{2}{3}$ et $c_2 = 0$. Ainsi, la solution de (P) qui vérifie ces conditions initiales est

$$u(t) = \frac{2}{3}\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3}\, e^t.$$

Puisque $u(1) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{2}{3}\, e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\, e}$$

Exercice 3.

Soit une fonction continue $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$. Montrons que toute solution de l'équation différentielle:

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

possède une suite de zéros qui tend vers $+\infty$ si la fonction q vérifie $\int_1^\infty q(x)dx = +\infty$.

Démonstration : Supposons par l'absurde qu'il existe $a > 0$ tq, par exemple, $y(x) > 0$, $\forall x \geq a$. Alors, on a

$$y''(x) = -q(x)y(x) < 0,\ \forall x > a$$

et donc la fonction y' est strictement décroissante sur $]a, \infty[$.

Soit alors $b > a$. On a par le théorème des accroissements finis, si $x > b$:

$$y(x) \quad = \quad y(b) + y'(b_x)(x-b) \quad < \quad y(b) + y'(b)(x-b)$$

où $b_x \in]b, x[$. Il suffit maintenant de trouver un point $b > a$ tel que $y'(b) < 0$ pour obtenir une contradiction de l'affirmation $y(x) > 0$, $\forall x \geq a$.

Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $z(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)}$ définie sur $[a, \infty[$. On a immédiatement

$$y'(x) < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z(x) > 0.$$

Remarquant que $z'(x) = q(x) + z^2(x)$, $x \in]a, \infty[$ on a

$$z(x) = z(a) + \int_a^x z'(t)dt \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

et donc, il existe un $c > b$ tel que $y(c) < 0$, ce qui est une contradiction.

$\square$

On peut aussi montrer qu'il existe un point b tq $y'(b) < 0$, sans cette fonction auxiliaire. Puisque $y(x) > 0$, $\forall x \geq a$, on a, pour $x > a$:

$$\int_a^x q(s)\, ds = \int_a^x -\frac{y''(s)}{y(s)}\, ds$$

et puis, en intégrant pas parties $(u'(s) = y''(s), u(s) = y'(s), v(s) = 1/y(s), v'(s) = -y'(s)/y^2(s))$:

$$\int_a^x q(s)\, ds = \int_a^x -\frac{y''(s)}{y(s)}\, ds = -\Big(\frac{y'}{y}\Big)\Big|_a^x - \int_a^x \Big(\frac{y'}{y}\Big)^2 ds.$$

Puisque $\int_a^\infty q(x)dx = +\infty$, on tire que $\dfrac{y'}{y}$ tend vers $-\infty$ (avec y positif).

Exercice 4.

a) Montrons l'inégalité de Young:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_+,$$

où $1 < p < \infty$ et q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Si $a = 0$ et/ou $b = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc que $a > 0$ et $b > 0$.
Si on pose $f(s) = \ln s$, on a $f'(s) = \frac{1}{s}$ et $f''(s) = -\frac{1}{s^2} < 0$ pour tout $s \in]0, \infty[$. Ainsi, la fonction $g(s) := -\ln s$ est convexe. Puisque $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$g(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \leq \frac{1}{p}g(a^p) + \frac{1}{q}g(b^q)$$

et par suite

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a bien

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

b) Montrons que si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et si $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est le produit scalaire euclidien, alors on a l'inégalité d'Hölder:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_p \cdot \|\mathbf{y}\|_q$$

où $1 \leq p \leq \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

- Si $p = 1$ et $q = +\infty$, on a, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \leq \max_{1\leq i \leq n} |x_i| \sum_{i=1}^n |y_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty \|\mathbf{y}\|_1.$$

- Soit $p \in]1, \infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Si $\mathbf{x} = 0$ ou/et $\mathbf{y} = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{y} \neq 0$. On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et en utilisant l'inégalité d'Young:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| = \sum_{i=1}^n \lambda |x_i| \cdot \frac{1}{\lambda}|y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^p}{p}|x_i|^p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q\lambda^q}|y_i|^q = \frac{\lambda^p}{p}\|\mathbf{x}\|_p^p + \frac{1}{q\lambda^q}\|\mathbf{y}\|_q^q. \end{aligned}$$

Si on pose $\lambda = \|\mathbf{x}\|_p^{-1/q}\,\|\mathbf{y}\|_q^{1/p}$ on obtient, puisque $p - \frac{p}{q} = q - \frac{q}{p} = 1$:

$$\lambda^p \|\mathbf{x}\|_p^p = \|\mathbf{x}\|_p^{p-p/q}\|\mathbf{y}\|_q = \|\mathbf{x}\|_p\|\mathbf{y}\|_q$$

et

$$\lambda^{-q}\|\mathbf{y}\|_q^q = \|\mathbf{x}\|_p\|\mathbf{y}\|_q^{q-q/p} = \|\mathbf{x}\|_p\|\mathbf{y}\|_q.$$

Ainsi,

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{1}{p}\|\mathbf{x}\|_p\|\mathbf{y}\|_q + \frac{1}{q}\|\mathbf{x}\|_p\|\mathbf{y}\|_q = \|\mathbf{x}\|_p\|\mathbf{y}\|_q.$$

c) Montrons que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \geq 1$ mais n'est pas une norme pour $0 < p < 1$.

- Supposons $p \geq 1$: Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. On a:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \; |x_i + y_i|^{p-1}. \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hölder $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\|_p \cdot \|\mathbf{b}\|_q$ avec $\mathbf{a} = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ et $\mathbf{b} = (|x_1 + y_1|^{p-1}, |x_2 + y_2|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1})$ ce qui donne:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| \; |x_i + y_i|^{p-1} = |(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\|_p \cdot \|\mathbf{b}\|_q &= \left\{\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right\}^{1/q} \\ &= \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

rappelant que, puisque $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a $(p-1)q=p$ ainsi que $\frac{p}{q}=p-1$. On obtient de ma même manière

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|\ |x_i+y_i|^{p-1}\leq \|\mathbf{y}\|_p\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}$$

et on a donc

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^p\leq \Big(\|\mathbf{x}\|_p+\|\mathbf{y}\|_p\Big)\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}.$$

Si $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p\neq 0$ on a l'inégalité triangulaire en divisant de part et d'autre par $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p^{p-1}$. Si $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p=0$, on l'a aussi trivialement.
Les autres propriétés d'un norme sont vérifiées trivialement.

- Supposons $0<p<1$: Soit $\mathbf{x}=(1,0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y}=(0,0,0,\ldots,0,1)\in\mathbb{R}^n$. On a $\|\mathbf{x}\|_p=\|\mathbf{y}\|_p=1$ et $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p=2^{1/p}>2$. On n'a donc pas l'inégalité triangulaire avec ces deux vecteurs et donc $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.

d) Si $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose $|\mathbf{x}|=(|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|)$. Montrons les inégalités suivantes:

- En posant $\mathbf{y}=(1,1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$ dans b), on obtient:

$$\|\mathbf{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=(|\mathbf{x}|,\mathbf{y})\leq\|\mathbf{x}\|_p\|\mathbf{y}\|_q=n^{1/q}\|\mathbf{x}\|_p$$

où $p\in[1,\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

- On a $\|\mathbf{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\leq\left(n\max_{1\leq i\leq n}|x_i|^p\right)^{1/p}=n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_\infty$ et donc

$$\|\mathbf{x}\|_p\leq n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_\infty,\quad p\in[1,\infty[.$$

Pour $p=+\infty$, l'inégalité est trivialement vraie.

- On a $\|\mathbf{x}\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\|\mathbf{x}\|_1$ et donc

$$\|\mathbf{x}\|_\infty\leq\|\mathbf{x}\|_1.$$

Montrons maintenant que toutes les normes $\|\cdot\|_p,\ p\in[1,\infty]$ sont équivalentes. Soit donc $p,r\in[1,\infty]$. On a, pour $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{x}\|_p\leq n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_\infty\leq n^{1/p}\|\mathbf{x}\|_1\leq n^{1/p}\cdot n^{1/s}\|\mathbf{x}\|_r\leq n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{s}}\|\mathbf{x}\|_r$$

avec $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, ce qui montre que n'importe quelle norme $\|\cdot\|_p$ peut être majorée par une norme $\|\cdot\|_r$ indépendemment de $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.