Bernard Le Stum, Infini-catégories
(d'après Cisinski)

1. Δ

$\Delta = \{\{0,1,\ldots,n\}, n \in \mathbb{N}\} \cong \{$ensembles ordonnés non vides$\} \subset \mathrm{Ord} \subset \mathrm{Cat}$

Quand on voit un ensemble ordonné comme catégorie, on a

$$\begin{tikzcd} \{0\} = [0] \arrow[r, leftrightarrow] & 0 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} = [1] \arrow[r, leftrightarrow] & 0 \arrow[r] \arrow[loop below] & 1 \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{0,1,2\} = [2] \arrow[r, leftrightarrow] & 0 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[loop below] & 1 \arrow[d] \arrow[loop right] \\ & & 2 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}([m],[n]) = \{$app. croissants$\} = \{$suites ordonnées de $m+1$ elements de $n\}$

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[loop left] \arrow[r, shift left=6, "\partial_0 : 0 \mapsto 1"] & {[1]} \arrow[l, "\sigma_0"'] \arrow[loop below] \arrow[r, shift left=8] \arrow[r, shift right=4] \arrow[r, shift right=16] & {[2]} \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=10] \\ {} \arrow[from=1-1, to=1-2, shift right=6, "\partial_1 : 0 \mapsto 0"'] \end{tikzcd}$$

Δ engendrée par σ_i, ∂_i (resp. répète i, oublie i)

2. $\widehat{\Delta}$

$\widehat{\Delta} := \{$préfaisceaux sur $\Delta\} = \{$foncteurs contravariants $\Delta \to \mathrm{Ens}\}$

$= \{ X_0 \begin{smallmatrix}\rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\end{smallmatrix} X_1 \begin{smallmatrix}\rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\end{smallmatrix} X_2 \ldots$ + compatibilitées $\}$

Ex : $\Delta^n : [m] \longmapsto \mathrm{Hom}([m],[n])$

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie

$\Delta^{\mathcal{C}} : \Delta \to \mathrm{Ens}$

$\quad [m] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([m], \mathcal{C})$

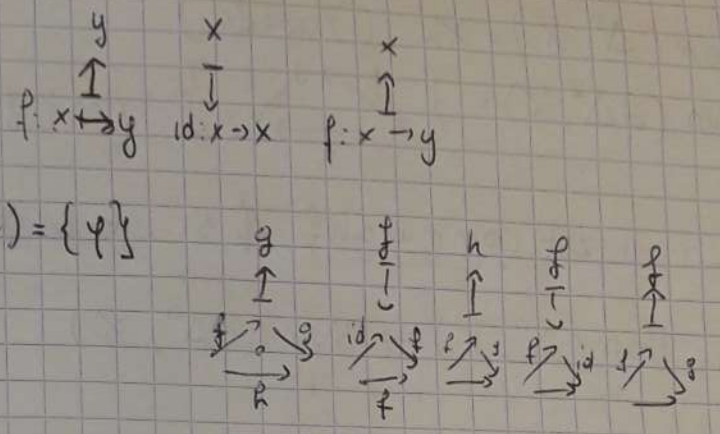
Nerf de $\mathcal{C}$ $(N(\mathcal{C}))$. $\Delta^{[m]} = \Delta^m$

$\Delta_0^{\mathcal{C}} = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{x\}$

but $\uparrow$ $\downarrow$id $\uparrow$source

$\Delta_1^{\mathcal{C}} = \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \{f\}$

$\Delta_2^{\mathcal{C}} =$ triangles commutatifs $(\mathcal{C}) = \{\varphi\}$



3. E

$E \in \mathbb{O}\mathrm{rd}$ $\quad \underset{\overset{\shortparallel}{E}}{\Delta_0^E} \underset{\xleftarrow{p_2}}{\overset{\xleftarrow{p_1}}{\xrightarrow{\Delta}}} \Delta_1^E \ldots$ $\quad$ si $E \subset F$, $\Delta^E \subset \Delta^F$.

<u>Ex</u>: $\partial\Delta^n := \bigcup_{E \subsetneq [n]} \Delta^E \subset \Delta^n$ "bord"

$\Lambda_k^n := \bigcup_{k \in E \subsetneq [n]} \Delta^E$ "corne"

$Sp^n = \bigcup_{0 \leq i < n} \Delta^{\{i,i+1\}}$ "colonne"

$Sk_1^n = \bigcup_{0 \leq i \leq j \leq n} \Delta^{\{i,j\}}$ "1-squelette"

<u>NB</u> $\Delta_{\leq N} \xhookrightarrow{i} \Delta$ $\qquad$ $\widehat{\Delta}_{\leq N} \underset{\xrightarrow[i_*]{}}{\overset{\xrightarrow{i_!}}{\xleftarrow{i^{-1}}}} \widehat{\Delta}$

$Sk_N = i_! i^{-1}$ $\quad cosk_N = i_* i^{-1}$

Dans le cas $N=3$,

$\Delta_{\leq 3} = \mathcal{C}at$, et

$i_* =$ Nerf, adjoint à droite de i^{-1}.

$\Lambda_1^2 = Sp^2 \subsetneq Sk_1^2 = \partial\Delta^2 \subsetneq \Delta^2$

4 <u>Triangle</u>

$X \in \widehat{\Delta}$, $X_0 = \{x\}$, $X_1 = \{f\}$, $X_2 = \{\varphi\}$

$d^0(f) = y$ et $d^1(f) = x$, f : "$x \to y$"

$d^0(\varphi) = g$, $d^1(\varphi) = h$, $d^2(\varphi) = f$ $\qquad$ $\varphi =$ "
$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & z \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}(\Delta^n, X) = X_n$ (Yoneda)

$$\mathrm{Hom}(\partial\Delta^2, X) = \left\{ \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & z \end{tikzcd} \right\} = \{\text{triangle } T\}$$

<u>Def</u> : T est <u>commutatif</u> si il existe $\varphi \in X_2$ t.q $\varphi_{|\partial\Delta_2} = T$

$$X_n = \mathrm{Hom}(\Delta^n, X) \to \mathrm{Hom}(\partial\Delta^n, X)$$
$$\varphi \longmapsto T$$

<u>5</u> $\mathcal{C}$?

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^2_1, X) = \left\{ \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] & & z \end{tikzcd} \right\}$$

$$X_2 = \mathrm{Hom}(\Delta^2, X) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^2_1, X)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi_{|\Lambda^2_1}.$$

Si $X = \Delta^{\mathcal{C}}$ pour une catégorie $\mathcal{C}$, alors l'application est une bijection.

En fait, $X = \Delta^{\mathcal{C}}$ <u>ssi</u> $\forall n$, $X_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Sp^n, X)$ bij
<u>ssi</u> $\forall k \neq 0, n$, $X_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$ bij

<u>Thm</u> $\mathcal{C}at \cong \left\{ \begin{array}{l} X \in \widehat{\Delta}, \forall n, \forall k \neq 0, n \\ \mathrm{Hom}(\Delta_n, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X) \end{array} \right\}$

<u>6</u> Sing

$$|\Delta^n| = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}, \sum x_i \leq 1\} \in \mathrm{Top}$$

$$|\lambda|(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow x_i = \sum_{\lambda(j) = i} y_j$$

$\lambda : [m] \to [n]$

$[n] \longmapsto |\Delta^n|$

$I = [0,1] = |\Delta^1|$

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{T}op \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Sing}"] \\
\hat{\Delta} \arrow[ur, bend left, "|\ |"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, shift left=2, leftarrow] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, leftarrow] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r, shift left=4, leftarrow] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=4, leftarrow] \arrow[d, equal] & X_2 \arrow[d, equal] \\
V & \{\gamma : I \to V\}_{\text{cont}} & \{\gamma : I \times I \underset{\text{cont}}{\to} V\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(\Lambda^2_1, X) = \mathrm{Hom}(|\Lambda^2_1|, V) = \mathrm{Hom}(I, V) \\
\mathrm{Hom}(\Delta^2, X) \arrow[d, equal] & \\
\mathrm{Hom}(|\Delta^2|, V) = \mathrm{Hom}(I \times I, V) \arrow[uur, two heads, "{\text{surjection, pas injection}}"'] &
\end{tikzcd}$$

$X = \mathrm{Sing}(V)$ est un complexe de Kan :

$\forall n, \forall k, \ X_n \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$ surj.

$\boxed{7}$ ∞-cat

Def : X est une <u>∞-catégorie</u> si $\forall n, \forall k \neq 0, n, \ X_n \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$ surj

Ex $\Delta^{\mathcal{C}}$, $\mathrm{Sing}\, V$

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{C}at \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Nerf}"] \\
\hat{\Delta} \arrow[ur, bend left, "\mathrm{Ho}"] &
\end{tikzcd}$$

Def X ∞-catégorie. On dit que $f, g : x \to y$ sont homotopes si
$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "g"] & \\
x \arrow[ur, "id_x"] \arrow[rr, "f"'] & & y
\end{tikzcd}$$
est commutatif

$(f \sim g)$

Prop : $\sim$ est une relation d'equivalence [NB ça utilise l'hypothése d'∞-cat.]

et $\mathrm{Ho}(X) = X/\sim$

$\mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(X)) = X_0$, $\mathrm{Mor}(\mathrm{Ho}(X)) = X_1/\sim$