15/11/19 Romagny :

Géométrie algébrique dérivée et supérieure
(DAG) (HAG)

I Les idées de DAG et HAG

* **Problèmes** : identifications d'objets
* un exemple (théorie des intersection)

courbes $C(f=0)$, $D(g=0)$ dans $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$\cap$ comme schéma : $C\cap D = C \times_{\mathbb{A}^2} D = \mathrm{Spec}\Big(\underbrace{\mathbb{C}[x,y]/(f,g)}_{R}\Big)$

. si transverse : $\dim(C\cap D)=0$

et en un pt P, $\mathrm{mult}_P(C\cap D) = \dim_{\mathbb{C}} R_P$

. sinon, p. ex. $C=D$?

Serre. la déf. de mult_P est $\sum_{i=0}^{\infty} \dim \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/f, \mathcal{O}/g)$

si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, P}$.

valable si $\dim_{\mathrm{Krull}} R = 0$

. DAG : . imposer $f=0$ deux fois, c'est la même chose que 1 fois

. idée : catégorifier R pour changer l'égalité $f=g$

en un isomorphisme $\alpha : f \Rightarrow g$

(cf intro de la thèse de Lurie)

→ on cherche une catégorie en anneaux [on ne travaille qu'avec des petites catégories]

$$\begin{cases} \mathcal{C} + \text{foncteurs} \begin{cases} \mathcal{C}\times\mathcal{C} \xrightarrow{+} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}\times\mathcal{C} \xrightarrow{\times} \mathcal{C} \end{cases} \\ \text{avec un isom } \underbrace{\pi_0 \mathcal{C}}_{\text{classes d'isom d'objets}} \simeq R \quad \text{(d'anneaux)} \end{cases}$$

Avec $\alpha : f \Rightarrow g$, le g-translaté de α va être un iso

$f-g \Rightarrow 0$ donc $R = R'/(f-g)$

on écrit donc $(f,g) = (f, f-g)$, on pose $R' = \mathbb{C}[x,y]/(f)$

On définit $\mathcal{C}$:

$$\text{ob } \mathcal{C} = R'$$

$$\text{Fl } \mathcal{C} = R'\times R' = \left\{ \underset{\substack{\cup\!\!\!\!\!\!\;\;\\ R'\times R'}}{(u,t)} : u \longrightarrow u+(f-g)t \right\}$$

cad : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u,v)\neq\emptyset \Leftrightarrow u \equiv v \ \mathrm{mod}\ (f-g)$

$$\xrightarrow{(u,t)} \underset{\substack{\shortparallel \\ u+(f-g)t}}{u'} \xrightarrow{(u',t')} \underbrace{u+(f-g)t}_{u'}+(f-g)t' = u''$$

donc $s(u,t) = u$

$b(u,t) = u+(f-g)t$

p. ex. : $\mathrm{End}(u) \overset{= \mathrm{Aut}(u) =}{=} R'[f-g]$ $\quad$ ($(f-g)$-torsion)

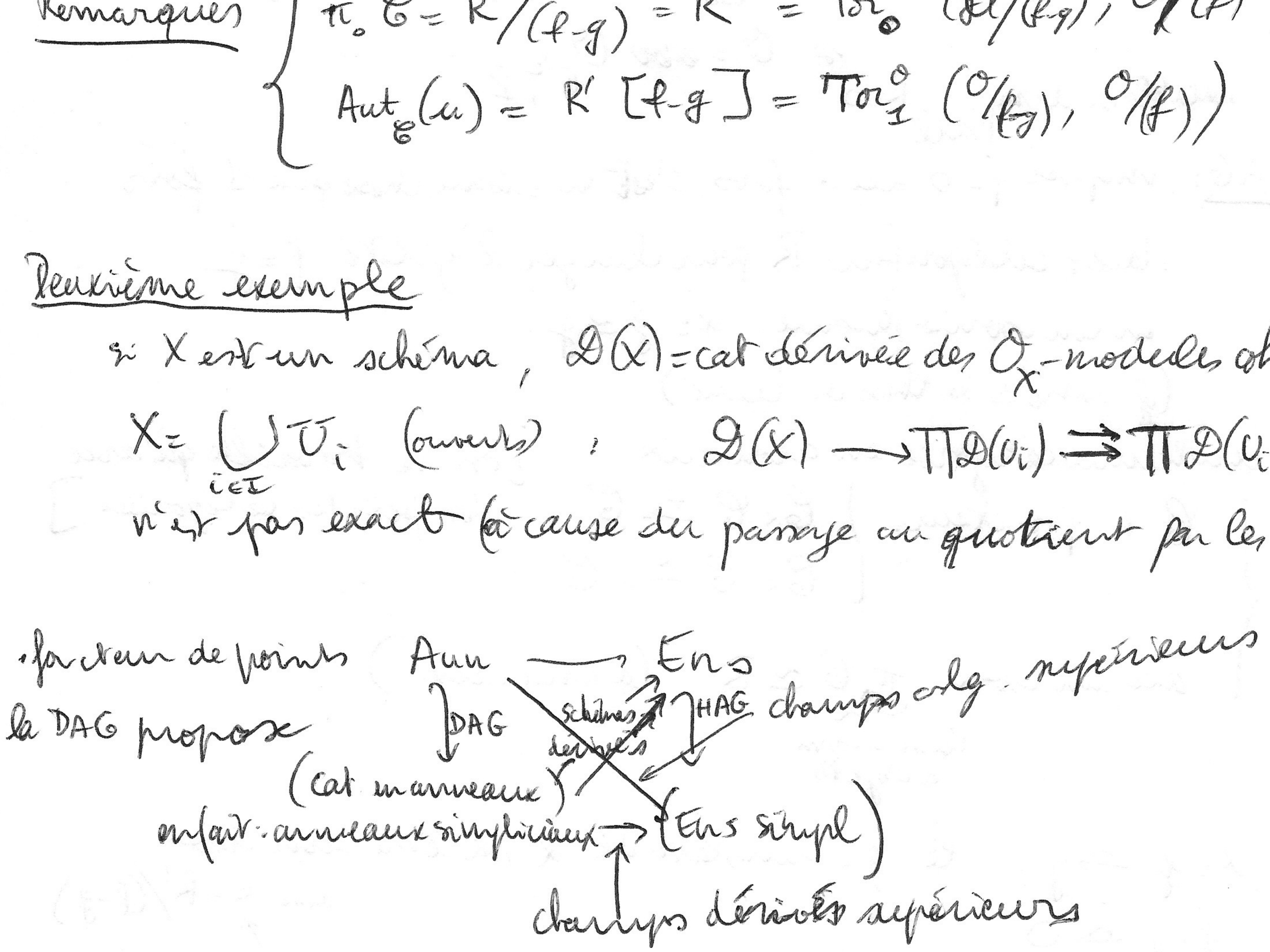
Remarques
$$\begin{cases} \pi_0\, \mathcal{C} = R'/(f-g) = R = \mathrm{Tor}_0^{\mathcal{O}}\left(\mathcal{O}/(f-g),\ \mathcal{O}/(f)\right) \\ \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(u) = R'[f-g] = \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}}\left(\mathcal{O}/(f-g),\ \mathcal{O}/(f)\right) \end{cases}$$

Deuxième exemple

si X est un schéma, $\mathcal{D}(X)$ = cat dérivée des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents

$X = \bigcup_{i\in I} U_i$ (ouverts) ; $\mathcal{D}(X) \longrightarrow \prod \mathcal{D}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{D}(U_i\cap U_j)$

n'est pas exact (à cause du passage au quotient par les q.i.s)



· Dernier exemple : lissité cachée (Kontsevich, Deligne ?)

$X/_k$ variété

$\mathrm{Vect}_n(X)$ = module des fibrés de rang n
comme champ algébrique

Il n'est pas toujours lisse.

théorie des déformations → espace tangent champêtre
= complexe $C^{[-1,0]}_{Zar}(X, \mathrm{End}\, E)[1]$ pour $[E] \in \mathrm{Vect}_n(X)$

$$\left[\underset{-1}{H^0(X, \mathrm{End}(E))} \to \underset{0}{H^1(X, \mathrm{End}(E))} \right]$$

dim : $-h^0 + h^1$

Si $\dim X = 1$ (X courbe lisse) c'est $\chi(\mathrm{End}\, E) \overset{RR}{=} n^2(g-1)$ ind^t de E

→ Vect_n est lisse.

En dim > 1, $\mathrm{Vect}_n(X)$ n'est pas lisse

$\boxed{\text{Conj}}$ (Kontsevich 95, Toën 2009) Il existe un espace de modules
supérieur ~~local~~ dérivé ? $\mathbb{R}\mathrm{Vect}_n(X)$ qui est un ∞-champ algébrique lisse

Probablement (à 99%) résolu, p. ex. par J. Pridham

II C'est quoi une ∞-catégorie ?

pb 1 trouver une définition

pb 2 ———— utile, maniable ...

(entre 1950 et 95-2000 : plein de définitions !

depuis Lurie : OK)

- thèse de Lurie 04
- HTT (Higher topos theory) 09 — 1000 pages
- H. Algebra (preprint) — 1200
- Spectral AG (——) — 2300

∞-catégories à <u>équivalence faible</u> près

(partie de la structure de catégorie de modèles)

Cat de modèles : cat C + ens. W de morphismes

$$\begin{tikzcd} \text{Cat de modèles} \arrow[d, "?"] \\ C[W^{-1}] \end{tikzcd}$$

ça existe mais pas maniable

Quillen : si on a des notions de fibration/cofibration, elle est plus maniable !

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{C}, W, F, C) \arrow[r] \arrow[d] & Ho(\mathcal{C}) \arrow[dl, "\simeq"] \\ \mathcal{C}[W^{-1}] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \text{Cat simpliciales enrichies (Quillen)} \arrow[d, "Ho"] & \text{quasi catégories (Joyal)} \arrow[dl, "\text{Lurie}"] & \text{Cat. de Segal (Segal)} \arrow[dll, "\text{Toën-Vezzosi}"] \\ \infty\text{-cat à équiv faible près} & & \end{tikzcd}$$

Si C est une catégorie :

$$n \mapsto C_n = \{ \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot \longrightarrow \cdot \cdots\cdots \cdot \xrightarrow{f_n} \cdot \}$$

$\to$ ensemble simplicial (nerf de C) $N(C)$