Catégories de modèles

Lionel Fourquaux, 28/11/2019

1 Catégories de modèles

Déf une catégorie de modèles est
- une catégorie $\mathcal{C}$ avec limites et colimites finies (ou petites)
- trois classes de morphismes W, Fib, Cof

W → éq. faibles, Fib → fibrations, Cof → cofibrations

vérifiant :
- (2 out of 3) si
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & Z \end{tikzcd}$$
avec 2 flèches dans W, la 3^e aussi
- les couples $(\mathrm{Cof}, \mathrm{Fib} \cap W)$ et $(\mathrm{Cof} \cap W, \mathrm{Fib})$ sont des systèmes de factorisations faibles i.e. des couples (A, B) d'ensembles de morphismes stables par rétractions

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[l, shift left, "p"] \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, shift left, "j"] & V \arrow[l, shift left, "q"] \end{tikzcd}$$
$pi = id$
$qj = id$

$g \in A \Rightarrow f \in A$ (ou B)

et tq $\forall f \in A$, $g \in B$ il existe un diagonal filler
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & V \end{tikzcd}$$

et tout morphisme s'écrit $p \circ i$, $i \in A$, $p \in B$.

NB · $\mathcal{C}$ a un objet initial et un objet final
- W est stable par composition et non vide ; contient les iso.
- Cof = la classe des morphismes qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport à tous les éléments de $\mathrm{Fib} \cap W$.

Fib = ... $\mathrm{Cof} \cap W$

Conséquences A, B stables par rétraction

A, B stables par pushout

A, B stables par composition transfinie

I ensemble bien ordonné, avec plus petit élément 0

si $\begin{cases} X : I \to \mathcal{C} \text{ foncteur} \\ \varinjlim_{j \leq i} X(j) \text{ existe } \forall i \neq 0 \\ \varinjlim_{j<i} X(j) \to X(i) \text{ est dans } A \end{cases}$

alors $\varinjlim_{i \in I} X(i)$ existe et $X(0) \to \varinjlim_{i \in I} X(i) \in A$

Csq : dans une catégorie de modèles $\mathcal{C}$, les classes W, Fib, Cof sont stables par composition et contiennent toutes trois les isomorphismes

Exemples

- A une petite catégorie $\mathcal{C}$ = préfaisceaux sur A
  W = tous les morphismes
  Cof = monomorphismes
  $Fib = r(Cof \cap W)$

- $\mathcal{C} = Top$ W = équivalences d'homotopie faible
  [$f : X \to Y$ continue tq $\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f x)$ isom. $\forall n$, $\forall x \in X$]

  Fib = fibrations de Serre = les $f : X \to Y$ qui ont la RLP (right lifting property) pour toutes les flèches $D^n \to D^n \times [0,1]$
  $x \mapsto (x, 0)$

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ D^n \times [0,1] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

$Cof = l(Fib \cap W)$

La vérification des axiomes de cat. de modèles utilise le "small object argument":

<u>Prop</u> [SOA] Soit $\mathcal{C}$ cat localement petite, avec colimites
soit I un ens. de morphismes de $\mathcal{C}$
Soit $\varkappa$ un cardinal tq $\forall K \in \mathcal{C}$ qui est source d'une flèche de I, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K,-)$ coreprésenté par K commute avec les colimites indicées par des ensembles bien ordonnés $\varkappa$-filtrés.
Alors $(l(r(I)), r(I))$ est un système de factorisation.

2) Localisation et homotopies

Rappel oral sur la construction générale d'une catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$ localisée d'une cat $\mathcal{C}$ par rapport à un ensemble de morphismes W.

<u>Déf</u>: dans une cat. de modèles on dit que $X \in \mathcal{C}$
est <u>fibrant</u> ssi $X \to *$ est une fibration
<u>cofibrant</u> ssi $\emptyset \to X$ est une cofibration

et contenant les isos

($\emptyset$: l'objet initial, $*$: l'objet terminal)

<u>Lm</u> (Ken Brown's lemma) soit $\mathcal{C}$ une cat de modèles, et $\mathcal{D}$ une cat. munie d'une classe W' de morphismes ayant la propriété 2 parmi 3. Soit $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.
Si F envoie ~~cof~~ les {cofibrations triviales} entre objets cofibrants dans W', alors F envoie <u>toutes</u> les équiv. faibles entre objets cofibrants dans W'.

<u>Dém</u>: cf références (Cisinski ou...) $\boxtimes$

Déf Un cylindre d'un objet $A \in \mathcal{C}$ est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \amalg A \arrow[r, "(\partial_0,\partial_1)", "\in \mathrm{Cof}"'] \arrow[rr, bend left, "(\mathrm{id},\mathrm{id})"] & IA \arrow[r, "\in W"'] & A \end{tikzcd}$$

un cocylindre d'un objet $X \in \mathcal{C}$ est un diag. commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\in W"'] \arrow[rr, bend left, "\Delta = (\mathrm{id},\mathrm{id})"] & X^I \arrow[r, "(d^0,d^1)", "\in \mathrm{Fib}"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

En topologie, des exemples sont $[0,1] \times A = IA$ et $X^{[0,1]} = X^I$
$$\overset{\shortparallel}{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}([0,1], X)}$$

Déf Une homotopie à $\left\{\begin{array}{l}\text{gauche}\\ \text{droite}\end{array}\right.$ de $f_0 : A \to X$ vers $f_1 : A \to X$ est la donnée d'un $\left\{\begin{array}{l}\text{cylindre}\\ \text{cocylindre}\end{array}\right.$ de A et un morphisme $\left\{\begin{array}{l} h : IA \to X \\ k : A \to X^I \end{array}\right.$ tq. $\left\{\begin{array}{l} h \circ \partial_i = f_i \\ d_i \circ k = f_i \end{array}\right.$, $i = 0,1$

Lm Dans la situation de la déf, si de plus A est cofibrant et X fibrant alors LCSSE :

(a) $\exists$ homotopie à gauche de f_0 vers f_1

(b) — " — droite — " —

(c) pour tout cylindre, il existe $h : IA \to X$. —

(d) — " — cocylindre, . — $k : A \to X^I$ $\boxtimes$

On en déduit que entre objets A cofibrants et X fibrants, l'homotopie (à gauche ou à droite) entre flèches $A \to X$ est une relation d'équivalence. Seule la vérification de la transitivité demande encore un peu de travail.

On pose alors, pour A cofibrant et X fibrant :

$$[A,X] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)/\sim$$

Ceci induit un bifoncteur : $[-,-] : \mathcal{C}_c^{op} \times \mathcal{C}_f \to \mathrm{Ens}$

<u>Th</u> L'inclusion $\mathcal{C}_c \to \mathcal{C}$ induit une éq. de catégories

$$ho(\mathcal{C}_c) \xrightarrow{\sim} ho(\mathcal{C}).$$

Ce théorème nous rassure sur le fait que ce n'est pas très grave de n'avoir $[A,X]$ que pour A cofibrant.

La dém est facile : par exemple $ho(\mathcal{C}_c) \to ho(\mathcal{C})$ est essentiellement surjectif car pour tout $X \in \mathcal{C}$, on peut factoriser $\emptyset \to X$ en $\emptyset \xrightarrow[\text{Cof}]{} Y \xrightarrow[\text{Fib}\cap W]{} X$ et Y est un "cofibrant replacement" pour X qui le relève.

<u>Déf</u> $\mathcal{C}_{cf}$ = sous-cat des objets cofibrants & fibrants

$\pi(\mathcal{C}_{cf})$ = cat dont les objets sont ceux-ci avec $\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(A,X) = [A,X]$.

<u>Prop</u> L'inclusion $\mathcal{C}_{cf} \to \mathcal{C}$ induit une éq. de cat.

$$\pi(\mathcal{C}_{cf}) \xrightarrow{\sim} ho(\mathcal{C}).$$