

① Catégories de modèles

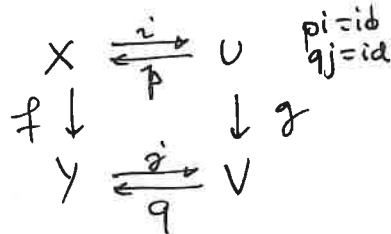
Def

- une catégorie de modèles est
- une catégorie  $\mathcal{C}$  avec limites et colimites finies
  - trois classes de morphismes  $W, \text{Fib}, \text{Cof}$  (ou petites)



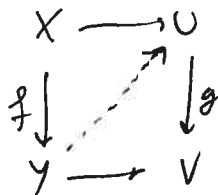
vérifiant :

- (2 out of 3) si  $X \begin{matrix} \rightarrow Y \\ \downarrow z \end{matrix}$  avec 2 flèches dans  $W$ , la 3<sup>e</sup> aussi
- les couples  $(\text{Cof}, \text{Fib} \cap W)$  et  $(\text{Cof} \cap W, \text{Fib})$  sont des systèmes de factorisations faibles i.e. des couples  $(A, B)$  d'ensembles de morphismes stables par rétractions



$g \in A \Rightarrow f \in A$   
(ou B)

et tq  $\forall f \in A, g \in B$  il existe un diagonal filler



et tout morphisme s'écrit  $poi$ ,  $i \in A, p \in B$ .

- NB.
- $\mathcal{C}$  a un objet initial et un objet final
  - $W$  est stable par composition et non vide ; contient les iso.
  - $\text{Cof} =$  la classe des morphismes qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport à tous les éléments de  $\text{Fib} \cap W$ .

$\text{Fib} = \dots \text{Cof} \cap W$

## Conséquences $A, B$ stables par rétraction

(2)

$A, B$  stables par pushout

$A, B$  stables par composition transfinie

$I$  ensemble bien ordonné, avec plus petit élément  $0$

si  $\left\{ \begin{array}{l} X: I \rightarrow \mathcal{C} \text{ foncteur} \\ \varinjlim_{j \leq i} X(j) \text{ existe } \forall i \neq 0 \\ \varinjlim_{j < i} X(j) \rightarrow X(i) \text{ est dans } A \end{array} \right.$

alors  $\varinjlim_{i \in I} X(i)$  existe et  $X(0) \rightarrow \varinjlim_{i \in I} X(i) \in A$

Csq : dans une catégorie de modèles  $\mathcal{C}$ , les classes  $W, \text{Fib}, \text{Cof}$  sont stables par composition et contiennent toutes trois les isomorphismes

## Exemples

- $A$  une petite catégorie  $\mathcal{C} = \text{préfaisceaux sur } A$   
 $W = \text{tous les morphismes}$   
 $\text{Cof} = \text{monomorphismes}$   
 $\text{Fib} = \text{cof} \cap W$

- $\mathcal{C} = \text{Top}$   $W = \text{équivalences d'homotopie faible}$   
 $[\varphi: X \rightarrow Y \text{ continue tq } \pi_n(\varphi, x): \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x)) \text{ isom. } \forall n, \forall x \in X]$

$\text{Fib} = \text{fibrations de Serre} = \text{les } \varphi: X \rightarrow Y$   
qui ont la RLP (right lifting property)  
pour toutes les flèches  $D^n \rightarrow D^n_x[0, 1]$   
 $x \mapsto (x, 0)$

$\text{Cof} = \text{cof} \cap W$

$$\begin{array}{ccc} D^n & \rightarrow & X \\ \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \\ D^n_x[0, 1] & \rightarrow & Y \end{array}$$

La vérification des axiomes de cat. de modèles utilise le "small object argument":

(3)

Prop [SOA] Soit  $\mathcal{C}$  cat localement petite, avec colimites  
Soit  $I$  un ens. de morphismes de  $\mathcal{C}$

Soit  $\kappa$  un cardinal tq  $\forall K \in \mathcal{C}$  qui est source  
d'une flèche de  $I$ , le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, -)$  coreprésenté  
par  $K$  commute avec les colimites indexées par  
des ensembles bien ordonnés  $\kappa$ -filtrés.

Alors  $(\ell(\kappa(I)), \kappa(I))$  est un système de factorisation.

## (2) Localisation et homotopies

Rappel oral sur la construction générale d'une catégorie  
 $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}$  localisée d'une cat  $\mathcal{C}$  par rapport à un  
ensemble de morphismes  $\mathcal{W}$ .

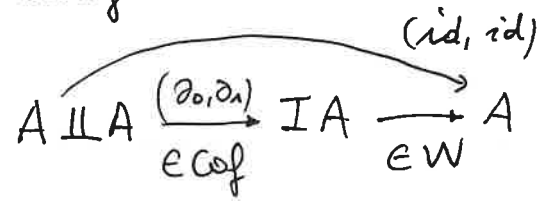
Déf: dans une cat. de modèles on dit que  $X \in \mathcal{C}$   
est fibrantssi  $X \rightarrow *$  est une fibration  
cofibrantssi  $\phi \rightarrow X$  est une cofibration  
( $\phi$ : l'objet initial,  $*$ : l'objet terminal)

et contenant  
les isos

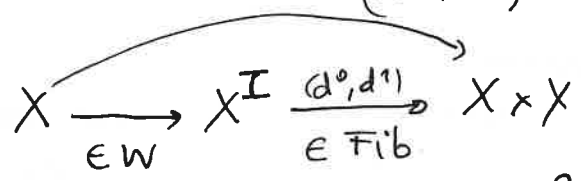
Lm (Ken Brown's lemma) soit  $\mathcal{C}$  une cat de modèles,  
et  $\mathcal{D}$  une cat. munie d'une classe  $\mathcal{W}'$  de morphismes  
ayant la propriété 2 parmi 3. Soit  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .  
Si  $F$  envoie ~~les~~ les cofibrations triviales entre  
objets cofibrants dans  $\mathcal{W}'$ , alors  $F$  envoie toutes  
les équiv. faibles entre objets cofibrants dans  $\mathcal{W}'$ .

Dém: cf références (Cisinski ou...)  $\square$

Déf Un cylindre d'un objet  $A \in \mathcal{C}$  est un diagramme commutatif



un cocylindre d'un objet  $X \in \mathcal{C}$  est un diag. commutatif



En topologie, des exemples sont  $[0,1] \times A = IA$  et  $X^{[0,1]} = X^I$   
 "  $\text{Hom}_{\text{cont}}([0,1], X)$

Déf Une homotopie à gauche de  $f_0: A \rightarrow X$  vers  $f_1: A \rightarrow X$  est la donnée d'un cylindre de  $A$  et un morphisme

$\begin{cases} h: IA \rightarrow X \\ k: A \rightarrow X^I \end{cases}$  tq.  $\begin{cases} h \circ \partial_i = f_i, i=0,1 \\ d_i \circ k = f_i \end{cases}$

Lm Dans la situation de la déf, si de plus  $A$  est cofibrant et  $X$  fibrant alors LCSSE :

- (a)  $\exists$  homotopie à gauche de  $f_0$  vers  $f_1$
- (b)  $\xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad}$  droite  $\xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad}$
- (c) pour tout cylindre, il existe  $h: IA \rightarrow X$ .
- (d)  $\xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad}$  cocylindre,  $\xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} k: A \rightarrow X^I$   $\square$

On en déduit que entre objets  $A$  cofibrants et  $X$  fibrants, l'homotopie (à gauche ou à droite) entre flèches  $A \rightarrow X$  est une relation d'équivalence. Seule la vérification de la transitivité demande encore un peu de travail.

On pose alors, pour  $A$  cofibrant et  $X$  fibrant: (5)

$$[A, X] = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) / \sim$$

Ceci induit un bifoncteur:  $[-, -]: \mathcal{C}_c^{\text{op}} \times \mathcal{C}_f \rightarrow \text{Ens}$

th L'inclusion  $\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{C}$  induit une éq. de catégories  
 $\text{ho}(\mathcal{C}_c) \xrightarrow{\sim} \text{ho}(\mathcal{C})$ .

Ce théorème nous rassure sur le fait que ce n'est pas très grave de n'avoir  $[A, X]$  que pour  $A$  cofibrant.

La dém est facile: par exemple  $\text{ho}(\mathcal{C}_c) \rightarrow \text{ho}(\mathcal{C})$  est essentiellement surjectif car pour tout  $X \in \mathcal{C}$ , on peut factoriser  $\phi \rightarrow X$  en  $\phi \xrightarrow{\text{cof}} Y \xrightarrow{\text{Fib}} X$

et  $Y$  est un "cofibrant remplacement" pour  $X$  qui le relève.

Def  $\mathcal{C}_{cf}$  = sous-cat des objets cofibrants & fibrants

$\pi(\mathcal{C}_{cf}) =$  cat dont les objets sont ceux-ci  $\uparrow$   
avec  $\text{Hom}_{\pi \mathcal{C}_{cf}}(A, X) = [A, X]$ .

Prop L'inclusion  $\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{C}$  induit une éq. de cat.

$$\pi(\mathcal{C}_{cf}) \xrightarrow{\sim} \text{ho}(\mathcal{C}).$$