Homotopie simpliciale

Hoàng Thế Nguyen
Le 6.12.2019

Déf La catégorie simpliciale Δ est définie par :

$$\mathrm{ob}(\Delta) = \{ [n] = \{0, \dots, n\} \quad , n \in \mathbb{N} \}$$

ordonné par $0 < 1 < \dots < n$

$$\mathrm{Mor}(\Delta) = \{ f : [m] \to [n] \text{ croissante} \}$$

on définit les morphismes particuliers :

faces : $\partial_n^i : [n-1] \to [n]$, $\partial_n^i(j) = \begin{cases} j & , j < i \\ j+1, & j \geq i \end{cases}$

dégénerescences : $\sigma_n^i : [n+1] \to [n]$, $\sigma_n^i(j) = \begin{cases} j & , j \leq i \\ j-1, & j > i \end{cases}$

Déf soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet simplicial de $\mathcal{C}$ est un foncteur (contravariant) $\Delta^\circ \to \mathcal{C}$

Pour $\mathcal{C} = \mathrm{Set}$ on note $\mathcal{S} = \mathrm{Fonct}(\Delta^\circ ; \mathrm{Set})$

Le cercle simplicial est

$$S^1 = \mathrm{Coker}\left(\Delta(\partial_1^0), \Delta(\partial_1^1) : \Delta[0] \rightrightarrows \Delta[1] \right)$$

ici on utilise Yoneda : $h : \Delta \hookrightarrow \mathrm{Fonct}(\Delta^\circ, \mathrm{Set})$

et on note $[n] = h_{[n]} = \Delta[n]$, au choix.

S^1 est donc le coker de $\partial_1^0, \partial_1^1$ dans la cat. des préfaisceaux

$$\partial_1^0, \partial_1^1 : [0] \to [1], \quad \partial_1^0(0) = 1, \quad \partial_1^1(0) = 0.$$

La réalisation géométrique d'un ens. simplicial X est $|X| \overset{df}{=} \varinjlim_{\Delta[n] \to X} |\Delta[n]|$

où $|\Delta[n]| = \Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$

et on a défini les faces et dégénerescences du côté topologique

Rem : on sait que dans la catégorie $\mathcal{S}$,

$$X = \varinjlim_{\Delta[n] \to X} \Delta[n]$$

(dans une cat. de préfaisceaux, tout préfaisceau est limite des préf. représentables qui s'envoient vers lui).

Déf Le bord de $\Delta[n]$ est défini par

$$\partial\Delta[n] = \mathrm{coker}(u, v) \quad \text{où}$$

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta[n-2]^{i,j} \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \coprod_{0 \leq i \leq n} \Delta[n-1]^i \qquad (*)$$

et $|\partial\Delta[n]| = \partial|\Delta[n]| = \partial\Delta^n$, comme on le vérifie.

(*) ici $u = \partial^{j-1}_{n-1}$ et $v = \partial^i_{n-1}$

La k-ème corne est

$$\Lambda^k[n] = \mathrm{coker}\left(\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta[n-2]^{i,j} \rightrightarrows \coprod_{i \neq k} \Delta(n-1)^i \right)$$

Prop : soit $X \in \mathcal{S}$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\Lambda^k[n], X) = \{ n\text{-uples } (x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n), x_i \in X_{n-1} \text{ tq } d_i x_j = d_{j-1} x_i, \ \forall i < j, i, j \neq k \}$$

[on a noté $d_i = d_i^n = X(\partial_i^n)$ et $s_i = s_i^n = X(\sigma_i^n)$].

Dém : $\boxtimes$

<u>Déf</u> : Une fibration de Kan est un morphisme d'ensembles simpliciaux $p : X \to Y$ tq.
$\forall n$, $\forall\, 0 \leq k \leq n$, on a la propriété de relèvement :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k[n] \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

Ceci se reformule de la manière suivante :

$\forall (x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)$, $x_i \in X_{n-1}$ tq $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ $\forall i<j$, $i,j \neq k$

$\forall y \in Y_n$, $d_i y = p(x_i)$ pour tout i

$\exists x \in X_n$, $d_i x = x_i$ $\forall i \neq k$

<u>Déf</u> Pour tout espace topologique $T \in Top$, on déf son complexe singulier $S(T) = Sing(T) \in \mathcal{S}$ par

$$[n] \mapsto Hom_{Top}(\Delta^n, T).$$

<u>Prop</u> : On a la propriété d'adjonction

$$Hom_{Top}(|X|, T) = Hom_{\mathcal{S}}(X, Sing(T)).$$

<u>Déf</u> ~~pour~~ pour tous $X, Y \in \mathcal{S}$, on définit le Mapping space qui est un Hom interne par $\underline{Hom}(X,Y) \in \mathcal{S}$,

$$\underline{Hom}(X,Y)_n = Hom_{\mathcal{S}}(\Delta[n] \times X, Y)$$

<u>Prop</u> On a l'adjonction

$$Hom_{\mathcal{S}}(K, \underline{Hom}(X,Y)) = Hom_{\mathcal{S}}(K \times X, Y) \qquad \boxtimes$$

Prop (i) soit $p : X \to Y$ une fibration (de Kan).

alors $p_{*K} : \underline{Hom}(K,X) \to \underline{Hom}(K,Y)$ est une fibration

(ii) Soit X un complexe de Kan (i.e. $X \in \mathcal{S}$ tq $X \to *$ fibration)

et $i : K \hookrightarrow L$ un mono. d'ensembles simpliciaux.

Alors $i_{*X} : \underline{Hom}(L,X) \to \underline{Hom}(K,X)$ est une fibration.

Dém : exercice $\boxtimes$

Déf : soient $f, g : K \to X$ des morphismes dans $\mathcal{S}$.

Une homotopie simpliciale de f à g est un h avec un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K \times \Delta[0] \simeq K \arrow[d, "1\times\Delta(\partial_1^1)"'] \arrow[dr, "f"] & \\
K \times \Delta[1] \arrow[r, "h"] & X \\
K \times \Delta[0] \simeq K \arrow[u, "1\times\Delta(\partial_1^0)"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

NB: (Se reformule en termes de $\underline{Hom}$: $f, g \in \underline{Hom}(K,X)_0$, $h \in \underline{Hom}(K,X)_1$)

Déf : Soient $f, g : K \to X$ et de plus $i : L \hookrightarrow K$ un mono.

Une homotopie simpliciale relativement à L est un $h : K \times \Delta[1] \to X$ comme avant, telque

$$\begin{tikzcd}
K \times \Delta[1] \arrow[r, "h"] & X \\
L \times \Delta[1] \arrow[u, hook] \arrow[r] & L \arrow[u, "\alpha = f_{|L} = g_{|L}"']
\end{tikzcd}$$

Prop : soit X un complexe de Kan. Alors la relation d'homotopie (rel L) est une relation d'équivalence.

Dém : exo $\boxtimes$

Déf Soit X un complexe de Kan, et $v \in X_0$.
On définit le n-ième groupe d'homotopie en v
par $\pi_n(X,v) = \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'homotopie de morphismes} \\ \alpha : \Delta[n] \to X \quad (\text{rel } \partial\Delta[n]) \\ \text{tq} \quad \begin{array}{ccc} \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \uparrow & & \uparrow v \\ \partial\Delta[n] & \longrightarrow & \Delta[0] \end{array} \end{array} \right\}$

$\pi_0(X) = \{\text{classes d'homotopie de sommets}\}$.

Rem L'autre définition, où la sphère est plutôt vue comme $\partial\Delta[n+1]$, fonctionne aussi : cf Gabriel & Zisman, Chap VI §3 (no 3.4).

On munit π_n d'une multiplication :

$$m : \pi_n(X,v) \times \pi_n(X,v) \longrightarrow \pi_n(X,v)$$

et d'un neutre

$e \in \pi_n(X,v)$ = la classe du morphisme constant $\Delta[n] \longrightarrow \Delta[0] \xrightarrow{v} X$.

Th $\pi_n(X,v)$ est un groupe, pour tout $n \geq 1$.
De plus il est abélien pour $n \geq 2$.

On va donner une esquisse de démonstration.

Déf L'espace des chemins de X : un complexe de Kan en un point $* \in X_0$ fixé. Il est défini comme le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} PX & \xrightarrow{i_X} & \underline{Hom}(\Delta[1], X) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \Delta(\partial_1^0)^* \\ \Delta[0] & \longrightarrow & \underline{Hom}(\Delta[0], X) \cong X \end{array}$$

L'espace de chemins est muni d'une application :

$$\pi : PX \xrightarrow{i_X} \underline{Hom}(\Delta[1], X) \xrightarrow{\Delta(\partial_1^1)^*} \underline{Hom}(\Delta[0], X) \cong X$$

$\Delta(\partial_1^0)^*$ est une fibration.

<u>Lemme</u> Pour tout sommet v, et tout $i \geq 0$, $\pi_i(PX, v) = 1$.
De plus, π est une fibration.