Homotopie simpliciale, ensembles simpliciaux, 2

Hoàng Thế Nguyen, 13.12.2019

__Déf__ : soit $i : K \hookrightarrow L$ une inclusion d'ensembles simpliciaux. On dit que i est une extension anodine ssi i à la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations (de Kan).

__Prop__ Soient $i : K \hookrightarrow L$ une ext. anodine et $Y \hookrightarrow X$ une inclusion. Alors $(K \times X) \cup (L \times Y) \hookrightarrow L \times X$ est une extension anodine.

__Dém__ : $\boxtimes$

Retour sur la démonstration du théorème. Nous voulions montrer (enoncé en lemme) :

- $\forall v, \forall i \geq 0, \; \pi_i(PX, v) = 1$ $\qquad$ X : complexe de Kan
- $\pi : PX \to X$ est une fibration.

La flèche $\Delta(\partial_1^{\varepsilon}) : \Delta[0] \to \Delta[1]$ est une extension anodine, comme il résulte d'arguments qui servent à démontrer la prop. admise ci-dessus (voir Gabriel Zisman).

On a le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
\partial\Delta[n] \arrow[r] \arrow[d, hook] & PX \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & \underline{Hom}(\Delta[1], X) \arrow[d, "\Delta(\partial_1^0)^*"] \\
\Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dotted] \arrow[urr, dashed] & \Delta[0] \arrow[r] & \underline{Hom}(\Delta[0], X)
\end{tikzcd}
$$

Par la proposition, $\Delta(\partial_1^{\varepsilon})^*$ a la LLP rel. à toutes les $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$.

Donc $PX \to \Delta[0]$ a la LLP rel. à toutes les $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$.

$$\begin{tikzcd}
\left(\Delta[n]\times\Delta[0]\right) \coprod_{\partial\Delta[n]\times\Delta[0]} \left(\partial\Delta[n]\times\Delta[1]\right) \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\
\Delta[n]\times\Delta[1] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Maintenant pour tout $\alpha : \Delta[n] \to PX$, $[\alpha] \in \pi_n(PX, v)$

on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta[n+1] \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \\
\Delta[n+1] \arrow[ur, dashed, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\omega \in X_{n+1}$

$\partial\omega := (d_0\omega, d_1\omega, \dots, d_{n+1}\omega)$

$= (v, \dots, v, \alpha)$

Or on a :

__Lemme__ : $\forall\, \alpha : \Delta[n] \to Y$, $[\alpha] \in \pi_n(Y, v)$ on a :

$$[\alpha] = e \iff \exists\ n+1\text{- simplexe } \omega \text{ de } Y \text{ tel que } \partial\omega = (v, \dots, v, \alpha)$$

__Dém__ : admis.

Ceci implique que $\pi_n(PX, v) = 1 \quad \forall n \geq 0$.

Revenons à $\pi : PX \to X$ et à $i : \partial\Delta[1] \hookrightarrow \Delta[1]$.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
PX \arrow[r] \arrow[dd, "\pi"'] \arrow[ddr, phantom, "\square"] & \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta[1], X) \arrow[d, "i^*"] \\
& \underline{\mathrm{Hom}}(\partial\Delta[1], X) \arrow[d, "\cong"] \\
X \arrow[r, "(*, 1_X)"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Pour comprendre l'iso. $\cong$ il faut noter que

$$\partial\Delta[1] = \mathrm{coker}\,(\emptyset \rightrightarrows \Delta[0]) = \Delta[0] \amalg \Delta[0].$$

Comme i^* est une fibration (vu la dernière fois, ceci vient du fait que X est fibrant = un cplx de Kan), et le diag. cartésien, on déduit que π est une fibration. ⊠

<u>L'espace de lacets ΩX</u> est défini par
$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & PX \arrow[d, "\pi"] \\ * \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Supposons que $p : X \to Y$ est une fibration, et F la fibre en un point $* \in Y_0$:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta[0] \simeq * \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Alors on a la suite exacte longue des π_i d'une fibration :

$$\cdots \to \pi_n(F,v) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,v) \xrightarrow{p_*} \pi_n(Y,*) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F,v)$$
$$\to \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_1(Y,*) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \xrightarrow{p_*} \pi_0(Y) \to *$$

La démonstration est facile, selon l'orateur.

En appliquant cette SE à $\Omega X \to PX \xrightarrow{\pi} X$ on obtient :

$$\to \pi_n(\Omega X, v) \to \pi_n(PX, v) \xrightarrow{\pi_*} \pi_n(X,*) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(\Omega X, v)$$
$$\to \cdots \to \pi_1(PX, v) \to \pi_1(X,*) \to \pi_0(\Omega X) \to \pi_0(PX) \to \pi_0(X) \to 0.$$

On déduit que $\pi_i(X,*) \simeq \pi_{i-1}(\Omega X, v)$ $\forall i \geq 1$

d'où, par l'argument de Eckmann-Hilton :

<u>Prop</u> : $\pi_i(\Omega X, *)$ est abélien $\forall i \geq 1$ (ΩX = "un H-espace")

d'où la propriété pour $\pi_i(X,*)$ $\forall i \geq 2$ d'abélianité.

<u>Théorème</u> Soit $f : X \to Y$, X, Y : complexes de Kan

<u>Alors</u> : f est une fibration <u>et</u> une équivalence faible,

ssi f a la RLP rel. à tous les $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$, $n \geq 0$.

<u>NB</u> : Déf $f : X \to Y$ éq. faible ssi $\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, fx)$
$\forall n \geq 0$, $\forall x \in X_0$.

<u>Dém</u> (commentaires) : le sens "$\Rightarrow$" est difficile
le sens "$\Leftarrow$" est plus ou moins déjà fait ☒

<u>Cylindres et cocylindres</u> (= espaces de chemins)

⚠ Nous dirons "fibration acyclique" pour "fibration + éq. faible"
On dit parfois aussi fibration triviale dans la littérature, mais plus loin nous aurons des fibrations loc. triviales au sens habituel (topologique).

On note $\mathcal{S}_f \subset \mathcal{S}$ la sous. cat pleine des complexes de Kan i.e. les objets fibrants (même si on n'a pas démontré que $\mathcal{S}$, avec ses classes de morphismes, est une cat. de modèles !)

$\mathcal{S}_f$ possède les produits finis.

<u>Déf</u> Un <u>objet cocylindre</u> de $X \in \mathcal{S}_f$ (ou $X \in \mathcal{S}$) est la donnée de

$$\begin{tikzcd} & X^I \arrow[d, "(d_0, d_1) = d"] \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

avec $X^I \in \mathcal{S}_f$ un objet fibrant
s : éq faible
d : fibration

Je dis que $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta[1], X)$ est un cocylindre de X :

on a $\sigma_0^0 : \Delta[1] \to \Delta[0]$ qui induit

$$X = \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta[0], X) \xrightarrow{(\sigma_0^0)^*} \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta[1], X).$$

De plus $\sigma_0^0 \partial_1^0 = id_{[0]}$

donc $s := (\sigma_0^0)^*$ est l'inverse à droite de $(\partial_1^0)^*$.

Mais $(\partial_1^0)^*$ est une fibration acyclique par le théorème, (partie facile !)

puisque $(\partial_1^0)^*$ a la RLP pour les $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n], n \geq 0$.

On déduit que s est une éq. faible, donc on a bien un cylindre.

Déf un cylindre est la donnée d'un objet noté $X \times I$

et i : cofibration
σ : éq. faible

avec un diag comm

$$\begin{tikzcd} X \amalg X \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\ X \times I \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

On démontre que dans $\mathcal{S}$, $X \times \Delta[1]$ est un cylindre de X.

Ainsi l'objet $I := \Delta[1]$ joue le rôle d'objet intervalle dans $\mathcal{S}f$ au sens où il donne naissance aux cylindres et cocylindres comme dans Top.

Une subtilité est que $\Delta[1]$, comme les autres $\Delta[n]$, $(n \geq 1)$ n'est pas un complexe de Kan !

Rem Gabriel-Zisman, chap VI, § 1, (1.4). démontre que $\Delta[n]$ est contractile

<u>Th</u> (Quillen) La réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre.

<u>Dém</u> Soit $p : X \to Y$ fibration de Kan. Alors il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "q"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & Z \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où q : <u>fibration minimale</u>, $gj = id_Z$ (cf ci-dessous)

et q est une déformation par retraction de p (rel. Y)

$h : \Delta[1] \times X \to X$ une homotopie de id_X à jg (rel. Y)

$$\begin{tikzcd} \Delta[1] \times X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "pr_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

<u>Fait 1</u> $g : X \to Z$ a la RLP pour les $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$, $\forall n \geq 0$.

<u>Fait 2</u> Si $g : X \to Z$ a la RLP $\forall \partial\Delta[n] \subset \Delta[n]$ alors $|g| : |X| \to |Z|$ est une fibration de Serre.

<u>Dém du Fait 2</u> : de l'hypothèse, on déduit que g a la RLP pour toutes les inclusions (vu dans un énoncé précédent). On a alors un relèvement :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "\Gamma_g = (1_X, g)"'] & X \arrow[d, "g"] \\ X \times Z \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "r"] & Z \end{tikzcd}$$

On déduit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(1,g)"] \arrow[d, "g"'] & X \times Z \arrow[r, "r"] \arrow[d, "pr_2"] & X \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "1_Z"] & Z \arrow[r, "1_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

i.e. g rétraction de pr_2.

Or $|pr_2|$ est une fibration de Serre,
d'où on déduit que $|g|$ est une fibration de Serre.

Nous allons utiliser un résultat de Gabriel-Zisman :

Si q est une fibration minimale, alors
q est localement triviale : au sens :

$$\begin{tikzcd} \Delta[n]\times F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \Delta[n] \arrow[r, "\forall y"] & Y \end{tikzcd}$$

et donc $|q|$ est une fib. de Serre

$\boxtimes$

<u>Rem1</u> un mor. "loc trivial" d'ens. simpliciaux s'entend donc au sens de la "topologie" des $\Delta[n] \to Y$.

<u>Rem2</u> Si $f : T \to U$ dans Top est une fibration de Serre, alors $\mathrm{Sing}(f) : \mathrm{Sing}(T) \to \mathrm{Sing}(U)$ est une fib. de Kan.
Ça, c'est plutôt facile à voir. Quillen donne la récip.

<u>Théo 1</u> Soit X un complexe de Kan.
Alors l'adjonction $\eta_X : X \to \mathrm{Sing}\,|X|$ est une éq. faible

<u>Rem</u> : En topologie, $|\Delta[n]| =: \Delta^n$ est fibrant
(contrairement à $\Delta[n] \in \mathcal{S}$)
d'où résulte que le simplexe se rétracte sur le cornet
donc $S(T) \to *$ est une fib. de Kan, $\forall T \in \mathrm{Top}$.

Dém th1 (esquisse) si $n=0$: facile.
Réc. sur n : $(\eta_X)_* : \pi_i(X,x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathrm{Sing}\,|X|, \eta x)$ $\forall i<n$

Or $\Omega X \to PX \to (X,x)$ fibration de Kan

$\overset{\text{Quillen}}{\Longrightarrow}$ $|\Omega X| \to |PX| \to |X|$ fibration de Serre

$\overset{\text{adjonction}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Sing}\,|\Omega X| \to \mathrm{Sing}\,|PX| \to \mathrm{Sing}\,|X|$ fib. de Kan

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X,x) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\partial"', "\cong"] & \pi_{n+1}(\mathrm{Sing}\,|X|, \eta x) \arrow[d, "\partial"] \\
\pi_n(\Omega X, x) \arrow[r, "\cong"] & \pi_n(\mathrm{Sing}\,|\Omega X|, \eta x)
\end{tikzcd} \qquad (\star)$$

On montre que PX est contractile en fabriquant une homotopie avec le mor. constant :

$$\begin{tikzcd}
(\Delta[0]\times\Delta[1]) \cup (PX \times \partial\Delta[1]) \arrow[r, "(x,(1_{PX},x))"] \arrow[d] & PX \arrow[d] \\
PX \times \Delta[1] \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & \Delta[0]
\end{tikzcd}$$

On déduit que PX contractile

donc $\mathrm{Sing}\,|PX|$ est contractile.

Par la SE longue des groupes d'homotopie on déduit que $\partial : \pi_{n+1}(\mathrm{Sing}\,|X|, \eta x) \to \pi_n(\mathrm{Sing}\,|\Omega X|, \eta x)$ est un iso dans le diagramme $(\star)$

D'où cqfd $\boxtimes$.

<u>Rem 1</u> : $\pi_n(X,x) \underset{(\text{théo})}{\cong} \pi_n(\mathrm{Sing}\,|X|, \eta x) \underset{(\text{adj})}{\cong} \pi_n(|X|, |x|)$.

Rem 2 :

Th (Milnor) Soit X un complexe de Kan.

Alors $\eta_X : X \to \mathrm{Sing}\,|X|$ est une éq. d'homotopie (pas juste faible !)

Th (Whitehead) Soient X, Y des complexes de Kan

Si $f : X \to Y$ est une éq. faible, c'est une éq. d'homotopie

Ainsi : le th de Quillen + le th de Whitehead impliquent le th de Milnor.

Nous arrivons au th. principal.

Th : La catégorie $\mathcal{S}$ avec W = équivalences faibles
F = fibrations de Kan
C = les inclusions

est une cat. de modèles.

Dem : on a presque tout démontré ! on arrête là $\boxtimes$