

Hoàng Thế Nguyễn, 13.12.2019

Déf : soit  $i: K \hookrightarrow L$  une inclusion d'ensembles simpliciaux

On dit que  $i$  est une extension anodine ssi  $i$  à la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les fibrations (de Kan).

Prop Soient  $i: K \hookrightarrow L$  une ext. anodine et  $Y \hookrightarrow X$  une inclusion. Alors  $(K \times X) \cup (L \times Y) \hookrightarrow L \times X$  est une extension anodine.

Dém :  $\square$

Retour sur la démonstration du théorème. Nous voulions montrer (énoncé en lemme) :

- $\forall n, \forall i \geq 0, \pi_i(PX, v) = 1$   $X$ : complexe de Kan
- $\pi: PX \rightarrow X$  est une fibration.

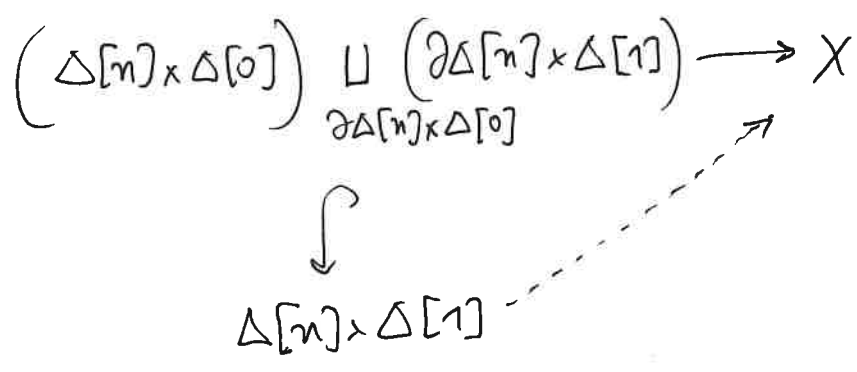
La flèche  $\Delta(\partial_1^\varepsilon): \Delta[0] \rightarrow \Delta[1]$  est une extension anodine, comme il résulte d'arguments qui servent à démontrer la prop. admise ci-dessus (voir Gabriel Zisman).

On a le diagramme :

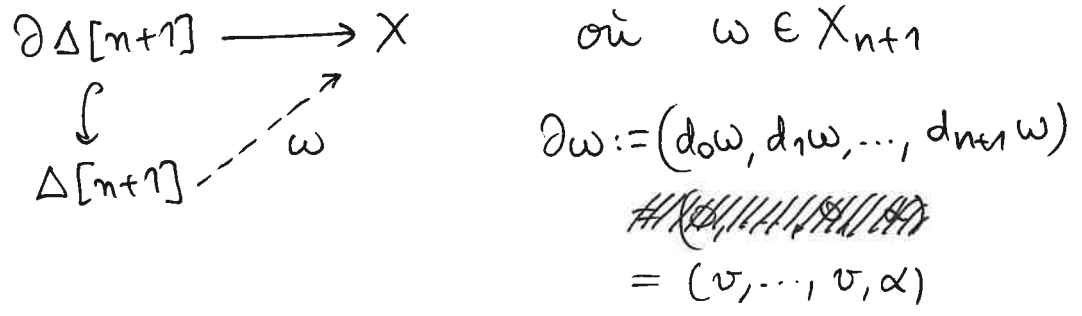
$$\begin{array}{ccccc}
 \partial\Delta[n] & \longrightarrow & PX & \xrightarrow{i_X} & \underline{\text{Hom}}(\Delta[1], X) \\
 \downarrow & \nearrow \text{---} & \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \Delta(\partial_1^0)^* \\
 \Delta[n] & \longrightarrow & \Delta[0] & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(\Delta[0], X)
 \end{array}$$

Par la proposition,  $\Delta(\partial_1^E)^*$  a la LLP  
rel. à toutes les  $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ .

Donc  $PX \rightarrow \Delta[0]$  a la LLP rel. à toutes les  $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ .



Maintenant pour tout  $\alpha: \Delta[n] \rightarrow PX$ ,  $[\alpha] \in \pi_n(PX, v)$   
on a le diagramme



Or on a:

Lemme:  $\forall \alpha: \Delta[n] \rightarrow Y$ ,  $[\alpha] \in \pi_n(Y, v)$  on a:

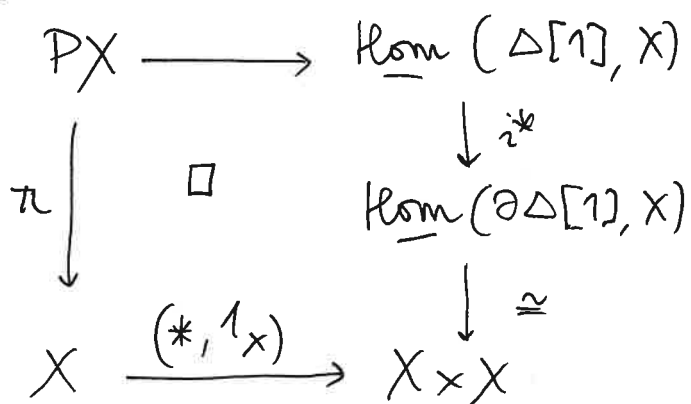
$$[\alpha] = e \iff \exists \text{ } n+1\text{-simplexe } \omega \text{ de } Y \text{ tel que } \partial\omega = (v, \dots, v, \alpha)$$

Dém: admis.

Ceci implique que  $\pi_n(PX, v) = 1 \quad \forall n \geq 0$ .

Revenons à  $\pi: PX \rightarrow X$  et à  $i: \partial\Delta[1] \hookrightarrow \Delta[1]$ .

On a le diagramme commutatif:



Pour comprendre l'iso.  $\cong$  il faut noter que

(3)

$$\partial\Delta[1] = \text{coker}(\phi \Rightarrow \Delta[0]) = \Delta[0] \perp \Delta[0].$$

Comme  $i^*$  est une fibration (vu la dernière fois, ceci vient du fait que  $X$  est fibrant = un cplx de Kan), et le diag. cartésien, on déduit que  $\pi$  est une fibration.  $\square$

L'espace de lacets  $\Omega X$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & PX \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi \\ * & \longrightarrow & X \end{array}$$

Supposons que  $p: X \rightarrow Y$  est une fibration, et  $F$  la fibre en un point  $* \in Y_0$ :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & \square & \downarrow p \\ \Delta[0] \simeq * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Alors on a la suite exacte longue des  $\pi_i$  d'une fibration :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_m(F, v) &\xrightarrow{i_*} \pi_m(X, v) \xrightarrow{p_*} \pi_m(Y, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{m-1}(F, v) \\ &\rightarrow \dots \xrightarrow{p_*} \pi_1(Y, *) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \xrightarrow{p_*} \pi_0(Y) \rightarrow * \end{aligned}$$

La démonstration est facile, selon l'orateur.

En appliquant cette SE à  $\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{\pi} X$  on obtient :

$$\begin{aligned} \rightarrow \pi_m(\Omega X, v) &\rightarrow \pi_m(PX, v) \xrightarrow{\pi_*} \pi_m(X, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{m-1}(\Omega X, v) \\ \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(PX, v) &\rightarrow \pi_1(X, *) \rightarrow \pi_0(\Omega X) \rightarrow \pi_0(PX) \rightarrow \pi_0(X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On déduit que  $\pi_i(X, *) \cong \pi_{i-1}(\Omega X, v) \quad \forall i \geq 1$

d'où, par l'argument de Eckmann-Hilton :

Prop :  $\pi_i(\Omega X, *)$  est abélien  $\forall i \geq 1$  ( $\Omega X$  = "un H-espace")

d'où la propriété pour  $\pi_i(X, *) \quad \forall i \geq 2$  d'abélianité.

Théorème Soit  $f: X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$ : complexes de Kan (4)

Alors:  $f$  est une fibration et une équivalence faible,

ssi  $f$  a la RLP rel. à tous les  $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ ,  $n \geq 0$ .

NB: Def  $f: X \rightarrow Y$  éq. faible ssi  $\pi_n(f): \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, fx)$   
 $\forall n \geq 0, \forall x \in X_0$ .

Dém (commentaires): le sens " $\Rightarrow$ " est difficile  $\boxtimes$   
le sens " $\Leftarrow$ " est plus ou moins déjà fait

Cylindres et cocylindres (= espaces de chemins)

$\triangle$  Nous dirons "fibration acyclique" pour "fibration + éq. faible"

On dit parfois aussi fibration triviale dans la littérature,  
mais plus loin nous aurons des fibrations loc. triviales  
au sens habituel (topologique).

On note  $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{F}$  la sous-cat. pleine des complexes de Kan  
i.e. les objets fibrants (même si on n'a pas démontré  
que  $\mathcal{F}_f$  avec ses classes de morphismes, est une cat. de modèles!)

$\mathcal{F}_f$  possède les produits finis.

Def Un objet cylindre de  $X \in \mathcal{F}_f$  (ou  $X \in \mathcal{F}$ ) est la

donnée de

$$\begin{array}{ccc} & & X^I \\ & \nearrow s & \downarrow (d_0, d_1) = d \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array}$$

avec  $X^I \in \mathcal{F}_f$  un objet fibrant

$s$ : éq. faible  
 $d$ : fibration

Je dis que  $\text{Hom}(\Delta[1], X)$  est un cocylindre de  $X$ :

on a  $\sigma_0 : \Delta[1] \rightarrow \Delta[0]$  qui induit

(5)

$$X = \underline{\text{Hom}}(\Delta[0], X) \xrightarrow{(\sigma_0)^*} \underline{\text{Hom}}(\Delta[1], X).$$

De plus  $\sigma_0 \partial_1^0 = \text{id}_{\Delta[0]}$

donc  $s := ~~(\sigma_0)^*~~ (\sigma_0)^*$  est l'inverse à droite de  $(\partial_1^0)^*$ .

Mais  $(\partial_1^0)^*$  est une fibration acyclique par le théorème, (partie facile!)

puisque  $(\partial_1^0)^*$  a la RLP pour les  $\partial\Delta[n] \subset \Delta[n], n \geq 0$ .

on déduit que  $s$  est une éq. faible, donc on a bien un cylindre.

Déf un cylindre est la donnée d'un objet noté  $X \times I$

et  $i$ : cofibration avec un diag comm

$\sigma$ : éq. faible

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & & \Delta \\ i \downarrow & \searrow & \downarrow \\ X \times I & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

On démontre que dans  $\mathcal{P}$ ,  $X \times \Delta[1]$  est un cylindre de  $X$ .

Ainsi l'objet  $I := \Delta[1]$  joue le rôle d'objet intervalle

dans  $\mathcal{P}$  au sens où il donne naissance aux cylindres

et cocylindres comme dans  $\text{Top}$ .

Une subtilité est que  $\Delta[1]$ , comme les autres  $\Delta[n], (n \geq 1)$ ,

n'est pas un complexe de Kan!

Rem Gabriel-Zisman, chap VI, §1, (1.4). démontre que  $\Delta[n]$  est contractile

th(Quillen) La réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre. ⑥

Dém Soit  $p: X \rightarrow Y$  fibration de Kan. Alors il existe

un diagramme  $Z \xrightarrow{j} X \xrightarrow{g} Z$  où  $g$ : fibration minimale  
 $g \circ j = \text{id}_Z$  (cf ci-dessous)

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & q \searrow & \\ & & X \\ & & \downarrow p \\ & & Y \\ & & \swarrow q \\ & & & \end{array}$$

et  $q$  est une déformation par rétraction de  $p$  (rel.  $Y$ )

$h: \Delta[1] \times X \rightarrow X$  une homotopie

de  $\text{id}_X$  à  $j \circ g$  (rel.  $Y$ )

$$\begin{array}{ccc} \Delta[1] \times X & \xrightarrow{h} & X \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow p \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Fait 1  $g: X \rightarrow Z$  a la RLP pour les  $\partial \Delta[n] \subset \Delta[n]$ ,  $\forall n \geq 0$ .

Fait 2 Si  $g: X \rightarrow Z$  a la RLP  $\forall \partial \Delta[n] \subset \Delta[n]$   
 alors  $|g|: |X| \rightarrow |Z|$  est une fibration de Serre.

Dém du Fait 2: de l'hypothèse, on déduit que  $g$  a la RLP pour toutes les inclusions (vu dans un énoncé précédent).  
 on a alors un relèvement:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ \Gamma_g = (1_X, g) \downarrow & \nearrow r & \downarrow g \\ X \times Z & \longrightarrow & Z \end{array}$$

On déduit  $X \xrightarrow{(1, g)} X \times Z \xrightarrow{r} X$

i.e.  $g$  rétraction de  $\text{pr}_2$ .

$$\begin{array}{ccccc} g \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{1_Z} & Z & \xrightarrow{1_Z} & Z \end{array}$$



Or  $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow (X, x)$  fibration de Kan

Quillen  $\implies | \Omega X | \rightarrow | PX | \rightarrow | X |$  fibration de Serre

adjonction  $\implies \text{Sing } | \Omega X | \rightarrow \text{Sing } | PX | \rightarrow \text{Sing } | X |$  fib. de Kan

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{m+1}(X, x) & \xrightarrow{\eta_X} & \pi_{m+1}(\text{Sing } |X|, \eta_X) \\
 \partial \downarrow \cong & & \downarrow \partial \quad (*) \\
 \pi_m(\Omega X, x) & \xrightarrow{\cong} & \pi_m(\text{Sing } | \Omega X |, \eta_X)
 \end{array}$$

On montre que  $PX$  est contractile en fabriquant une homotopie avec le mor. constant:

$$\begin{array}{ccc}
 (\Delta[0] \times \Delta[1]) \cup (PX \times \partial \Delta[1]) & \xrightarrow{(x, (1_{PX}, x))} & PX \\
 \downarrow & \searrow h & \downarrow \\
 PX \times \Delta[1] & \xrightarrow{\quad} & \Delta[0]
 \end{array}$$

On déduit que  $PX$  contractile

donc  $\text{Sing } |PX|$  est contractile

Par la SE longue des groupes d'homotopie on

déduit que  $\partial: \pi_{m+1}(\text{Sing } |X|, \eta_X) \rightarrow \pi_m(\text{Sing } | \Omega X |, \eta_X)$

est un iso dans le diagramme (\*)

D'où  $\square$ .

Rem 1:  $\pi_m(X, x) \xrightarrow{\text{(théor)}} \pi_m(\text{Sing } |X|, \eta_X) \xrightarrow{\text{(adj)}} \pi_m(|X|, |x|)$ .



Rém 2:

(9)

th (Milnor) Soit  $X$  un complexe de Kan.

Alors  $\eta_X: X \rightarrow \text{Sing}(X)$  est une éq. d'homotopie  
(pas juste faible !)

th (Whitehead) Soient  $X, Y$  des complexes de Kan

Si  $f: X \rightarrow Y$  est une éq. faible, c'est une éq. d'homotopie

Ainsi: le th de Quillen + le th de Whitehead  
impliquent le th de Milnor.

Nous arrivons au th. principal.

th: la catégorie  $\mathcal{J}$  avec  $W =$  équivalences faibles  
 $F =$  fibrations de Kan  
 $C =$  les inclusions

est une cat. de modèles.

Dém: on a presque tout démontré ! on arrête là  $\square$