∞-catégories

Bernard Le Stum, 26/01/2020
(d'après Cisinski)

1. La catégorie Δ

$\Delta = \{[n], n \in \mathbb{N}\} \simeq \{\text{ens. ordonnés finis non vides}\}$ (catégorie)

$\subseteq \mathbb{O}\mathrm{rd} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{at}$ où $[n] := \{0, \dots, n\} = \text{“}n+1\text{”}$

$\uparrow$ ensembles ordonnés

On a des représentations diagrammatiques :

$[0] = \{0\}$ $\quad 0 \circlearrowleft$

$[1] = \{0, 1\}$ $\quad 0 \longrightarrow 1$

$[2] = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}([m], [n]) = \{\text{applications croissantes}\}$ (qui préservent l'ordre)

$= \{\text{suites ordonnées de } m+1 \text{ éléments de } [n]\}$

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, shift left=2, "\partial_0 : 0 \mapsto 1"] \arrow[r, shift right=2, "\partial_1 : 0 \mapsto 0"'] & {[1]} \arrow[l, "\sigma_0"'] \arrow[r, shift left=4, "\partial_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=4, "\partial_2"'] & {[2]} \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \end{tikzcd}$$

Δ engendrée par les ∂_i (oublie i) et σ_i (répète i)

2. La catégorie $\hat{\Delta}$

C'est la catégorie des ~~...~~ préfaisceaux (d'ensembles) sur Δ.

$\hat{\Delta} = \{\text{foncteurs contravariants } \Delta \to \mathrm{Ens}\}$

$= \{ X_0 \leftleftarrows X_1 \; \substack{\leftarrow\\\leftarrow\\\leftarrow} \; X_2 \cdots + \text{compatibilités} \}$

Ex de tel foncteur contravariant :

$$\Delta^n : [m] \longmapsto \mathrm{Hom}([m],[n])$$

Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie on peut définir

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{C}} : \Delta &\longrightarrow \mathrm{Ens} \\ [m] &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}([m],\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Ce truc-là est le nerf de la catégorie $\mathcal{C}$, souvent noté $N(\mathcal{C})$.

Voyons voir :

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{\mathcal{C}}_0 = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{x\} \arrow[d, "\mathrm{id}" description] \\
\Delta^{\mathcal{C}}_1 = \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \{f : x \to y\} \arrow[u, shift left=3, "\mathrm{but}"] \arrow[u, shift right=3, "\mathrm{source}"'] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \\
\Delta^{\mathcal{C}}_2 = \mathrm{Trico}(\mathcal{C}) = \{\varphi\} \arrow[u, shift left=4] \arrow[u] \arrow[u, shift right=4]
\end{tikzcd}$$

triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} y & x \arrow[d, mapsto] & x \\ f \arrow[u, mapsto] & \mathrm{id}_x & f \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} g & f \arrow[d, mapsto] & h & f \arrow[d, mapsto] & f \\ \varphi \arrow[u, mapsto] & \cdot \xrightarrow{\mathrm{id}} \cdot \xrightarrow{f} \cdot,\ \xrightarrow{f} & \varphi \arrow[u, mapsto] & \cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{\mathrm{id}} \cdot,\ \xrightarrow{f} & \varphi \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

$$\varphi = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \cdot \arrow[r, "g"] & \cdot \end{tikzcd}$$

3. Cas des ensembles ordonnés

Soit E un ens. ordonné : $E \in \mathbb{O}\mathrm{rd}$

$$\begin{tikzcd} \Delta^E_0 \arrow[r] & \Delta^E_1 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \end{tikzcd}$$

$\Delta^E_0 = E$, $\Delta^E_1 =$ graphe de la relation d'ordre

Note : $E \subset F \iff \Delta^E \subset \Delta^F$

Exemples : $\partial \Delta^n = \bigcup_{E \subsetneq [n]} \Delta^E \subset \Delta^n$ le bord

$\Lambda^n_k = \bigcup_{k \in E \subsetneq n} \Delta^E$ la corne $\subset \Delta^n$

$$Sp^n = \bigcup_{0 \leq i < n} \Delta^{\{i,i+1\}} \quad \text{la } \underline{\text{colonne}} \subset \Delta^n$$

(épine dorsale !)

$$Sk_1^n = \bigcup_{0 \leq i \leq j \leq n} \Delta^{\{i,j\}} \quad \text{le } \underline{\text{1-squelette}} \subset \Delta^n$$

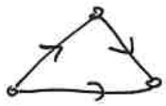
<u>NB</u> $\Delta_{\leq N} \overset{i}{\hookrightarrow} \Delta$ donne naissance à
$$\hat{\Delta}_{\leq N} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_!} \\ \xleftarrow{i^{-1}} \\ \xrightarrow[i_*]{} \end{array} \hat{\Delta}$$

$$sk_N = i_! i^{-1} \quad \text{et} \quad cosk_N = i_* i^{-1}$$

façon minimale de prolonger un ensemble simplicial tronqué

façon maximale de prolonger

$$\Lambda_1^2 = Sp^2 \subsetneq sk_1^2 = \partial\Delta^2 \subsetneq \Delta^2$$



(triangle)

(triangle plein)

4. Triangles

Soit $X \in \hat{\Delta}$, on notera x, f, φ les éléments de X_0, X_1, X_2.

Si $d^0(f) = y$ et $d^1(f) = x$ on notera $f = \text{“} x \xrightarrow{f} y \text{”}$

Si $d^0(\varphi) = g$, $d^1(\varphi) = h$, $d^2(\varphi) = f$ on note $\varphi = $ “
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dr, "g"] & \\
x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & \arrow[u, phantom, "\varphi\Downarrow"] & z
\end{tikzcd}
”

on pose aussi $s^0(x) = id_x$

$s^0(f) = id_f^0$

$s^1(f) = id_f^1$

les 2 identités qu'on a vues en page 2

On a : $\mathrm{Hom}(\Delta^n, X) = X_n$ (Yoneda)

$$\mathrm{Hom}(\partial\Delta^2, X) = \left\{ \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & z \end{tikzcd} \right\} \text{ triangles de } X$$

$=: T$

Déf : T est commutatif s'il existe $\varphi \in X_2$ tel que $\varphi|_{\partial\Delta_2} = T$.

5. Retour aux catégories $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^2_1, X) = \left\{ \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] & & z \end{tikzcd} \right\} \text{ ens. des flèches composables}$$

$\cap$

$\mathrm{Hom}(\partial\Delta^2, X)$ = flèches composables avec un candidat pour être le composé

$\cup$

$\mathrm{im}\left(\mathrm{Hom}(\Delta^2, X) \xrightarrow[res]{} \mathrm{Hom}(\partial\Delta^2, X)\right)$ = triangles commutatifs

Ex si $X = \Delta^{\mathcal{C}}$ est le nerf d'une catégorie $\mathcal{C}$, la restriction

$$X_2 = \mathrm{Hom}(\Delta^2, X) \xrightarrow{res} \mathrm{Hom}(\Lambda^2_1, X)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi|_{\Lambda^2_1}$$

est une bijection.

En fait X est de la forme $\Delta^{\mathcal{C}}$ (nerf d'une cat. $\mathcal{C}$)

ssi $\forall n$, $X_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Sp^n, X)$ bijection [conditions de Grothendieck - Segal]

ssi $\forall n, \forall k \neq 0, n$, $X_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$ bijection.

En fait

th $\mathbf{Cat} \simeq \{ X \in \hat{\Delta}, \forall n, \forall k \neq 0, n, \mathrm{Hom}(\Delta^n, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X) \}$

NB si on inclut $k = 0, n$ aussi on a les groupoïdes.

6. Sing

$$|\Delta^n| := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0},\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\} \in \mathbb{T}\mathrm{op}$$

et pour $\lambda : [m] \to [n]$ on pose

$$|\lambda|(y_1,\dots,y_m) := (x_1,\dots,x_n) \quad \text{avec} \quad x_i = \sum_{\lambda(j)=i} y_j$$

d'où un foncteur $|\cdot| : \Delta \to \mathbb{T}\mathrm{op}$

$$\begin{tikzcd}
& {[n]} \arrow[r, mapsto] & {|\Delta^n|} \\
{[n]} \arrow[d, mapsto] & \Delta \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{T}\mathrm{op} \arrow[dl, shift left, "{V \mapsto X := \mathrm{Sing}(V)}"] \\
\Delta^n & \hat{\Delta} \arrow[ur, shift left, "{X \mapsto |X|}"] &
\end{tikzcd}$$

avec $X : [m] \mapsto \mathrm{Hom}(|\Delta^m|, V)$

Le lemme de Kan dit qu'on peut prolonger $\Delta \to \mathbb{T}\mathrm{op}$ à $\hat{\Delta}$.

Notons $I = [0,1] = |\Delta^1|$ l'intervalle.

$I \times I = |\Delta^2|$ (ils sont bien homéomorphes !)

Si $X = \mathrm{Sing}(V)$ on aura

$$\begin{array}{ccccc}
X_0 & \begin{smallmatrix}\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\end{smallmatrix} & X_1 & \begin{smallmatrix}\leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\end{smallmatrix} & X_2 \\
\| & & \| & & \| \\
V & & \{\gamma : I \to V\} & & \{\gamma : I \times I \to V\} \\
& & \text{chemins continus} & & \text{continus}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
X_2 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\Lambda^2_1, X) \simeq \mathrm{Hom}(|\Lambda^2_1|, V) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}(\Delta^2, X) & & \mathrm{Hom}(I, V) \\
\| & & \\
\mathrm{Hom}(|\Delta^2|, V) = \mathrm{Hom}(I \times I, V) & \twoheadrightarrow & \text{surj, non injectif !}
\end{array}$$

$X = \mathrm{Sing}(V)$ est un complexe de Kan :

$\forall n, \forall k$ (inclus $0, n$), $X_n \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$ est surjectif.

7. ∞-catégories

Déf : X est une ∞-catégorie si
$\forall n, \forall k \neq 0, n, \quad X_n \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k, X)$ est surjectif.

Ex : $\Delta^{\mathcal{C}}$ et $\mathrm{Sing}(V)$ sont des ∞-catégories.

Parlons maintenant de l'adjoint du nerf.

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Cat} \arrow[dl, shift left, "\Delta^{\mathcal{C}}" ', "\mathcal{C}"] \\ \hat{\Delta} \arrow[ur, shift left, "\substack{\text{adjoint} \\ \mathrm{Ho}}"] & \end{tikzcd}$$

Notations possibles :

$\Delta^{\mathcal{C}} = N(\mathcal{C})$

$\mathrm{Ho}(X) = \tau(X)$

Déf Soit X une ∞-catégorie. On dit que $f, g : x \to y$ $(\in X_1)$ sont homotopes (noté $f \sim g$) si
$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "f"] & \\ x \arrow[ur, "id_x"] \arrow[rr, "g"'] & & y \end{tikzcd}$$
est commutatif.

Prop : Si X est une ∞-cat la relation $\sim$ est une rel. d'équivalence et $\mathrm{Ho}(X) = X/\sim$

On a : $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(X)) = X_0$, $\mathrm{Mor}(\mathrm{Ho}(X)) = X_1/\sim$

et $\bar{f} \circ \bar{g} = \bar{h}$ ssi
$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "g"] & \\ \cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & \cdot \end{tikzcd}$$
est commutatif

Dém (lemme de Joyal) tournez la page !

Le lemme de Joyal dit que dans une ∞-cat,

$$\begin{tikzcd}
 & & x_2 \arrow[d] \\
x_0 \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[drr] & x_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & x_3
\end{tikzcd}$$

si les triangles intérieurs sont commutatifs alors le triangle extérieur aussi.

Lorsque $X = \Delta^{\mathcal{C}}$, le lemme équivaut à dire que la composition est associative.