



② On voit que l'existence de  $\begin{matrix} p^! \\ p_* \end{matrix}$  dépend de  $F$ .

Def: L'extension de  $\text{Kon}$  à gauche de  $F$  le long  $p$  est une paire  $(\text{Lan}_p F, a)$  t.q. on a un isomorphisme de foncteurs  $\text{Hom}(\text{Lan}_p F, -) \cong \text{Hom}(F, p^*( - ))$ ,  $a: F \rightarrow p^* \text{Lan}_p F$  morphisme  $u: \text{Lan}_p F \rightarrow G \mapsto p^* u \circ a$

[On parle d'extension de  $\text{Kon}$  locale]

Ex 2: Prenons  $p$  essentiellement surjectif. Cas où  $C' = \{pt\}$   
Alors  $G: C' \rightarrow D$  est simplement un objet de  $D$ .

Les propriétés universelles d'ext de  $\text{Kon}$  s'écrivent, pour  $X \in \text{ob } D$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(F, k_x) &= \text{Hom}(\lim F, X) \\ \text{Hom}(k_x, F) &= \text{Hom}(X, \text{colim } F) \end{aligned} \quad \text{si existent}$$

$$k_x: C \rightarrow D \quad \text{foncteur constant à valeur } x \\ \psi \mapsto x$$

Exercice: si  $D$  possède les colimites, alors  $\text{Lan}_p F$  existe et

$$(\text{Lan}_p F)(X') = \text{colim}_{X, f: pX \rightarrow X'} F(X)$$

$$(\text{Ran}_p F)(X') = \lim_{X, f: X' \rightarrow pX} F(X)$$



②

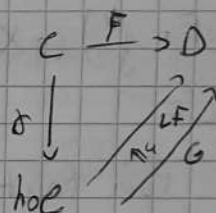
## 2 Dérivation des foncteurs

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie modèle ;  $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \text{ho}\mathcal{C}$  son foncteur de localisation  
 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$

Def: soib  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur ( $\mathcal{D}$  qcq). Un foncteur dérivé à gauche de  $F$  (s'il existe) est une paire  $L_F: \text{ho}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $\alpha: L_F \circ \gamma \rightarrow F$  qui fait de  $L_F$  l'ext de Kan à droite de  $F$  le long de  $\gamma$ .

$$\text{Hom}(G, L_F) = \text{Hom}(\gamma^* G, F)$$

$$u \mapsto \alpha \circ \gamma^* u = \alpha$$



Q1: existe-t-il des foncteurs ayant de dérivés gauche et droit non-triviaux

Q2: Sait-on dériver à gauche des foncteurs non exact à droite

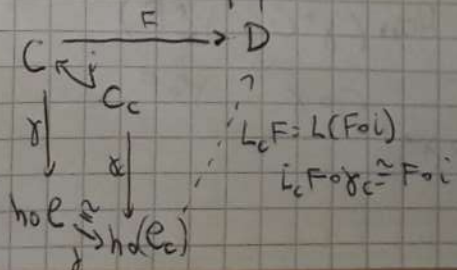
Rappel: (Ken Brown's lemma) [Lionel]

$\mathcal{C}$  cat modèle,  $\mathcal{D}$  cat. avec ~~ensemble~~ une classe d'équiv faible  
 ( $\rightarrow$  isos, 2 parmi 3)

Si un foncteur  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  envoie les cofibrations triviales entre cofibrants sur des équivalences faibles, alors  $F$  envoie toutes les équivalences faibles entre ~~equiv~~ cofibrants sur des équivalences faibles.

Construction d'un foncteur dérivé à gauche :

Soit  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  qui envoie cofibrations triviales entre cofibrants sur des isos.



On veut construire  $LF: ho C \rightarrow D$  et  $\alpha: LF \circ \gamma \rightarrow F$

Choisissons un remplacement fonctoriel  $\alpha'_x: i @ X \rightarrow X$   
isomorphisme éq. faible

On déduit:

$$\textcircled{1} \quad F \alpha'_x: F i @ X \rightarrow F X$$

$$\textcircled{2} \quad \gamma \alpha'_x: \gamma_c @ X \rightarrow \gamma^{-1} \gamma X$$

iso car  $\gamma$ : éq. faible  $\rightarrow$  iso's

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow \underbrace{(L_c F \circ \gamma^{-1})}_{LF} (\gamma X) \xrightarrow{\alpha'_x} F X$$

Conclusion-Prop: Pour tout  $F: C \rightarrow D$  qui envoie les cofibrations triviales entre obj cofibrants sur des iso, la paire  $(LF, \alpha)$  est un dérivé à gauche de  $F$ .

De plus pour tout  $G: D \rightarrow E$  la paire  $(GLF, G\alpha: GLF \circ \gamma \rightarrow G \circ F)$  est un dérivé à gauche de  $GF$ .

Dém  $G$  envoie isos sur isos

Rém: ce n'est pas formel.

Soit  $F: C \rightarrow C'$  entre deux cat modèles. Def un foncteur dérivé à gauche total est un  $\int LF: ho C \rightarrow ho C'$  qui complète un carré

$$\begin{cases} \alpha: LF \circ \gamma \rightarrow \gamma' \circ F \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & C' \\ \gamma \downarrow & \delta \nearrow & \gamma' \downarrow \\ ho C & \xrightarrow{LF} & ho C' \end{array}$$

avec un iso fonctoriel en  $G$

$$\text{Hom}(G, LF) \simeq \text{Hom}(\gamma^* G, \gamma'^* F)$$

$G \circ \gamma$        $\gamma' \circ F$

$$t \mapsto \delta \circ \gamma^* t$$



5) Si  $F$  préserve les  $\begin{cases} \text{cofibrations triviales} \\ \text{fibrations} \end{cases}$

il possède un dérivé à gauche totale.  
(droite)

Rem: pour un dérivé à droite total le p. univ. est

$$\text{Hom}(RF, G) \cong \text{Hom}(\gamma^*F, \gamma^*G)$$

$$u \mapsto \gamma^*u \circ \epsilon$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & C' \\ \downarrow & \cong & \downarrow \\ \text{ho}C & \xrightarrow{\text{ho}F} & \text{ho}C' \\ & \text{IRF} & \end{array}$$

Composition:

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{F} & C' & \xrightarrow{F'} & C'' \\ \delta \downarrow & \cong & \downarrow & \cong & \downarrow \\ \text{ho}C & \xrightarrow{\text{ho}F} & \text{ho}C' & \xrightarrow{\text{ho}F'} & \text{ho}C'' \\ \text{LF} & & \text{LF}' & & \end{array}$$

$$\delta: \text{LF} \circ F \rightarrow \gamma^* \circ F$$

$$\delta': \text{LF}' \circ F' \rightarrow \gamma'' \circ F'$$

$$\rightarrow \delta' \circ \delta: \text{LF}' \circ \text{LF} \circ F \xrightarrow{\text{LF}' \circ \delta} \text{LF}' \circ \gamma^* \circ F \xrightarrow{\delta' \circ F} \gamma'' \circ F' \circ F$$

on a une paire  $(\text{LF}' \circ \text{LF}, \delta' \circ \delta)$

→ Par le P.U. de  $\text{LF}' \circ \text{LF}$ , il y a un morphisme

$$\text{LF}' \circ \text{LF} \rightarrow \text{LF}' \circ \text{LF} \rightarrow \text{LF}' \circ \text{LF} \rightarrow \text{LF}' \circ \text{LF}$$

Prop: Soient  $F: C \rightarrow C'$ ,  $F': C' \rightarrow C''$  deux fcts entre cat modèle qui préservent les cofibrations triviales. Alors le morphisme  $\text{LF}' \circ \text{LF} \rightarrow \text{LF}' \circ \text{LF}$  est un iso.

### 3. Adjonctions de Quillen

Def: Une adjonction de Quillen entre deux cat modèle  $C$  et  $C'$

est une adjonction  $F: C \rightleftarrows C': G$  (L point vers adf à gauche)

t.q.  $F$  préserve les cofibrations et  $G$  préserve les fibrations.

$F$  est dit foncteur de Quillen à gauche  
 $G$  " " " " " droite.



Rem: si  $F: C \rightleftarrows C': G$  est une adj entre deux catégories munies de système de factorisation faibles (wfs)

$(A, B)$  et  $(A', B')$  resp. alors

$$F(A) \subset A' \Leftrightarrow G(B') \subset B$$

Csq:  $(F, G)$  est une adjonction de Quillen

$\Leftrightarrow F$  préserve les cofibr & les cofibr triviales

$\Leftrightarrow G$  " " fibr " fib triviales.

Thm ④ Une adj de Quillen induit une adjonction  $\mathbb{L}F: ho C \rightleftarrows ho C': \mathbb{R}G$

① Si  $\forall A \in C_c, \forall X \in C'_f: A \xrightarrow{f} GX$  eq. faible  $\Leftrightarrow FA \xrightarrow{f^b} X$  eq. faible

alors  $\mathbb{L}F$  et  $\mathbb{R}G$  sont des quasi-inverses

Exemples:

①  $1 \cdot 1: sSet \rightleftarrows Top: Sing$

est une équivalence de Quillen (= adj de Q qui induit équivalence)

② Homotopy pushout

(= somme amalgamée homotopique)

$$I = \{ a \leftarrow b \rightarrow c \}$$

$e^I$  a une structure modèle "terme à terme"

$$\text{colim}: e^I \rightleftarrows e: \Delta$$

est une adj. de Quillen

Le dérivé totale  $\mathbb{L}\text{colim}$  est le pushout homotopique

② Produit fibré homotopique

③  $M: R\text{-module}, M \otimes -: Ch_R \rightarrow Ch_Z$  possède un dérivé à gauche totale

$$M \otimes^{\mathbb{L}} -$$