(1)

Foncteurs dérivés et adjonctions de Quillen, Matthieu Romagny

1 Extensions de foncteurs

Soit $p : C \to C'$ un foncteur. Pour tout catégorie D, on a un foncteur $Hom(C', D) \to Hom(C, D)$
$G \longmapsto p^*G = G \circ p$

<u>Def</u> L'adjoint à $\begin{cases} \text{gauche} \\ \text{droite} \end{cases}$ de p^* est appellé ext. de Kan à $\begin{cases} \text{gauche} \\ \text{droite} \end{cases}$ globale s'il existe; il est noté $\begin{cases} p_! & \text{ou } Lan_p \text{, appelé image directe homologique} \\ p_* & Ran_p \quad \text{" \quad " \quad " cohomologique} \end{cases}$

Ceci signifie qu'on a des bijections $Hom(p_! F, G) = Hom(F, p^*G)$
$Hom(G, p_* F) = Hom(p^*G, F)$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & C' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \overset{?}{\nearrow} {\scriptstyle \exists ? G} & \\ D & & \end{array}$$

<u>Ex</u> : C, C', D des ensembles, F et G des applications
$Hom(F, p^*G) = \begin{cases} * & \text{si } F = p^*G \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$

Étudions l'existence de $\tilde{F} = p_! F$

① p injectif $\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ C' & & \end{array}$

S'il existe $\tilde{F}$ on a $Hom(\tilde{F}, G) = Hom(F, G_{|C}) = \{*\}$

Alors $\tilde{F} = G$ pour tout G.

Si p pas bijectif ou $card(D) \geq 2$, c'est impossible.

② p surjectif $\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ \downarrow{\scriptstyle p} & \overset{?}{\nearrow} & \\ C' & G & \end{array}$. s'il existe $\tilde{F}$ ~~on~~ l'égalité $\tilde{F} \circ p = F$ implique F = constant sur les fibre de p.
Lorsque c'est le cas, $\tilde{F}$ est l'application obtenue par passage au quotient

(2) On voit que l'existence de $\begin{matrix} p_! \\ p_* \end{matrix}$ dépend de F.

Def : L'extension de Kan à gauche de F le long p est une paire $(\mathrm{Lan}_p F, a)$ t.q. on a un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}(\mathrm{Lan}_p F, -) = \mathrm{Hom}(F, p^*(\ ))$, $a : F \to p^* \mathrm{Lan}_p F$ morphisme

$$u : \mathrm{Lan}_p F \to G \mapsto p^* u \circ a$$

[On parle d'extension de Kan locale]

Ex 2 : Prenons p essentiellement surjectif. Cas où $C' = \{pt\}$

Alors $G : C' \to D$ est simplement un object de D.

Les propriétés universelles d'ext de Kan s'écrivent, pour $X \in \mathrm{ob} D$

$$\mathrm{Hom}(F, k_X) = \mathrm{Hom}(\lim F, X)$$

s'ils existent

$$\mathrm{Hom}(k_X, F) = \mathrm{Hom}(X, \mathrm{colim}\, F)$$

$k_X : C \to D$ foncteur constant à valeur X
$\quad Y \mapsto X$

Exercice : si D possède les colimites, alors $\mathrm{Lan}_p F$ existe et

$$(\mathrm{Lan}_p F)(X') = \mathrm{colim}_{X, f : pX \to X'} F(X)$$

$$(\mathrm{Ran}_p F)(X') = \lim_{X, f : X' \to pX} F(X)$$

③

2 Dérivation des foncteurs

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie modèle ; $\gamma : \mathcal{C} \to \mathrm{ho}\,\mathcal{C}$ son foncteur de localisation
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{C}[W^{-1}]$

Def: soit $F : C \to D$ un foncteur (D qcq). Un foncteur dérivé à gauche de F (s'il existe) est une paire $LF : \mathrm{ho}\,\mathcal{C} \to D$, $a : LF \circ \gamma \to F$ qui fait de LF l'ext de Kan à droite de F le long de γ.
$(\gamma_* F)$

$$\mathrm{Hom}(G, LF) = \mathrm{Hom}(\gamma^* G, F)$$
$$u \longmapsto a \circ \gamma^* u = \alpha$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \\ \mathrm{ho}\,\mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "LF"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow u"] & \end{tikzcd}$$

Q1 : existe-t-il des foncteurs ayant de dérivés gauche et droit non-triviaux

Q2 : Sait-on dériver à gauche des foncteurs non exact à droite

Rappel : (Ken Brown's lemma) [Lionel]

$\mathcal{C}$ cat modèle, $\mathcal{D}$ cat. avec ~~ensemble~~ une classe d'équiv faible
($\supset$ isos, 2 parmi 3)

Si un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ envoie les cofibrations triviales entre cofibrants sur des équivalences faibles, alors F envoie toutes les équivalences faibles entre ~~equiv~~ cofibrants sur des équivalences faibles.

Construction d'un foncteur dérivé à gauche :

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui envoie cofibrations triviales entre cofibrants sur des iso's.
modèle $\quad$ cat. qcq

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "F"] \arrow[dd, "\gamma"'] & & D \\ & C_c \arrow[ul, "i"'] \arrow[d, "\gamma_c"] & \\ \mathrm{ho}\,\mathcal{C} \arrow[r, "\simeq"', "\gamma"] & \mathrm{ho}(\mathcal{C}_c) \arrow[uur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$L_c F = L(F \circ i)$

$L_c F \circ \gamma_c \simeq F \circ i$

On veut construire $LF : ho\,\mathcal{C} \to D$ et $a : LF \circ \gamma \to F$

Choisissons un remplacement fonctoriel $a'_X : i\underset{\text{cofibrant}}{Q}X \underset{\text{éq. faible}}{\to} X$

On déduit:

① $\underset{\substack{\wr\!\wr \\ L_cF(\gamma_c QX)}}{F a'_X : FiQX \to FX}$

② $\gamma a'_X : \gamma_c(QX) \underset{\text{iso car } \gamma : \text{ éq faible} \to \text{iso's}}{\to} j^{-1}\gamma X$

①+② $\Rightarrow$ $\underbrace{(L_cF \circ j^{-1})}_{LF}(\gamma X) \xrightarrow{a_X} FX$

<u>Conclusion-Prop</u>: Pour tout $F : \mathcal{C} \to D$ qui envoie les cofibrations triviales entre obj cofibrants sur des iso, la paire (LF, a) est un dérivé à gauche de F.

De plus pour tout $G : D \to E$ la paire $(GLF, Ga : GLF\circ\gamma \to G\circ F)$ est un dérivé à gauche de GF.

Dém G envoie isos sur isos

Rem: ce n'est pas formel.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre deux cat modèles. <u>Def</u> un foncteur dérivé à gauche <u>total</u> est un $\begin{cases} \mathbb{L}F : ho\,\mathcal{C} \to ho\,\mathcal{C}' \text{ qui complète un carré} \\ \delta : \mathbb{L}F \circ \gamma \to \gamma' \circ F \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\delta \nearrow"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "\gamma'"] \\ ho\mathcal{C} \arrow[r, "\mathbb{L}F"'] & ho\mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

avec un iso fonctoriel en G

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{L}F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\underset{\substack{\| \\ G\circ\gamma}}{\gamma^* G}, \underset{\substack{\| \\ \gamma'\circ F}}{\gamma'_* F})$$

$$t \mapsto \delta \circ \gamma^* t$$

Si F préserve les $\begin{cases}\text{cofibrations triviales}\\ \text{fibrations}\end{cases}$

il possède un dérivé à $\begin{cases}\text{gauche}\\ \text{droite}\end{cases}$ totale.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow \varepsilon"] & C' \arrow[d] \\ \mathrm{ho}C \arrow[r, "\mathbb{R}F"'] & \mathrm{ho}C' \end{tikzcd}$$

<u>Rem</u> : pour un dérivé à droite total la p. univ. est

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}F, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\gamma_* F, \gamma^* G)$$
$$u \longmapsto \gamma^* u \circ \varepsilon$$

<u>Composition</u> :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \delta"] & C' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "\gamma'"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \delta'"] & C'' \arrow[d, "\gamma''"] \\ \mathrm{ho}C \arrow[r, "\mathbb{L}F"'] & \mathrm{ho}C' \arrow[r, "\mathbb{L}F'"'] & \mathrm{ho}C'' \end{tikzcd}$$

$\delta : \mathbb{L}F \circ \gamma \to \gamma' \circ F$

$\delta' : \mathbb{L}F' \circ \gamma' \to \gamma'' \circ F$

$\to \delta' * \delta : \mathbb{L}F' \circ \mathbb{L}F \circ \gamma \xrightarrow{\mathbb{L}F'\delta} \mathbb{L}F' \circ \gamma' \circ F \xrightarrow{\delta' \circ F} \gamma'' \circ F' \circ F$

on a une paire $(\mathbb{L}F' \circ \mathbb{L}F, \delta' * \delta)$

$\to$ Par la P.U. de $\mathbb{L}(F' \circ F)$, il y a un morphisme

$\mathbb{L}F' \circ \mathbb{L}F \to \mathbb{L}(F' \circ F)$

<u>Prop.</u> Soient $F : C \to C'$, $F' : C' \to C''$ deux fcts entre cat modèle qui préservent les cofibrations triviales. Alors le morphisme

$\mathbb{L}F' \circ \mathbb{L}F \to \mathbb{L}(F' \circ F)$ est un iso.

3. <u>Adjonctions de Quillen</u>

<u>Def</u> Une adjonction de Quillen entre deux cat modèle C et C' est une adjonction $F : C \rightleftarrows C' : G$ (⊥ point vers adj à gauche) t.q. F préserve les cofibrations et G préserve les fibrations.

F est dit foncteur de Quillen à gauche

G " " " droite.

Rem : si $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}' : G$ est une adj entre deux catégories munies de système de factorisation faibles (WFS) (A, B) et (A', B') resp. alors

$F(A) \subset A' \Leftrightarrow G(B') \subset B$

Csq : (F, G) est une adjonction de Quillen

$\Leftrightarrow$ F préserve les cofibr & les cofibr triviales

$\Leftrightarrow$ G " fibr " fib triviales.

Thm ① Une adj de Quillen induit une adjonction $\mathbb{L}F : ho\,\mathcal{C} \rightleftarrows ho\,\mathcal{C}' : \mathbb{R}G$

② Si $\forall A \in \mathcal{C}_c, \forall X \in \mathcal{C}'_f : A \xrightarrow{f} GX$ éq. faible $\Leftrightarrow FA \xrightarrow{f^b} X$ éq. faible

alors $\mathbb{L}F$ et $\mathbb{R}G$ sont des quasi inverses

Examples :

① $|\cdot| : sSet \rightleftarrows Top : Sing$

est une équivalence de Quillen (= adj. de Q qui induit équivalence)

② Homotopy pushout

(= somme amalgamée homotopique)

$I = \{a \leftarrow b \rightarrow c\}$

$\mathcal{C}^I$ a une structure modèle "terme à terme"

$colim : \mathcal{C}^I \rightleftarrows \mathcal{C} : \Delta$

est une adj. de Quillen

Le dérivé totale $\mathbb{L}colim$ est le pushout homotopique

② Produit fibré homotopique

③ M : R-module, $M \otimes \_ : Ch_R \to Ch_{\mathbb{Z}}$ possède un dérivé à gauche totale $M \otimes^{\mathbb{L}} \_$