Anneaux simpliciaux commutatifs

Tobias Schmidt
6 mars 2020

§. Rappels sur les complexes de Kan

Δ : catégorie avec $\mathrm{Ob}(\Delta) = \{[m] ; m \geq 0\}$ $[m] = \{0 < 1 < \dots < m\}$

et $\mathrm{Hom}([m],[n])$ = applic. qui préservent l'ordre

On a des applications particulières

$$[n] \underset{\sigma_j}{\overset{\partial_i}{\rightleftarrows}} [n+1]$$

$0 \leq i \leq n+1$

$0 \leq j \leq n$

Pour toute cat. $\mathcal{C}$ on note $s\mathcal{C} = \mathrm{Fonct}(\Delta^{op}, \mathcal{C})$

Aussi, $\mathcal{S} := s\mathcal{E}ns$

Ψ

X

$X_n := X([n])$, $n \geq 0$ $X_n \underset{\partial_i}{\overset{\sigma_j}{\rightleftarrows}} X_{n+1}$

$\Delta^n := \mathrm{Hom}(-,[n])$ et dedans : $\Lambda^n_k \subset \partial\Delta^n \subset \Delta^n$

Def $X \in \mathcal{S}$ est fibrant, ou un complexe de Kan, si

$\forall n$, $x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_{n+1} \in X_n$ tq $\forall i<j$ $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$
$\forall\, 0 \leq k \leq n+1$ (KAN)
alors $\exists\, y \in X_{n+1}$, $\partial_i y = x_i$.

Ex1: le complexe simplicial d'un esp. topologique est fibrant

Ex2: un groupe simplicial est fibrant (dû à Kan)

Dém: soit $x_0, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_{n+1} \in G_n$ satisfaisant (KAN)

on veut trouver des $g_r \in G_{n+1}$ avec $\partial_i g_r = x_i \quad \forall i \leq r$

Posons $g_{-1} = 1$, et supposons que g_{r-1} est trouvé.

Posons $g = g_{r-1}$. Alors, on pose :

si $r = k \qquad g_r := g$

si $r \neq k \qquad u := (x_r)^{-1} \partial_r g \in G_n, \quad g_r := g(\sigma_r u)^{-1}$

Pour $i = r$ on a $\partial_r g_r = \partial_r(g) u^{-1} = x_r$

Pour $i < r$ on a $\partial_i(u) = \partial_i(x_r)^{-1} \partial_i \partial_r g = \partial_i(x_r)^{-1} \partial_{r-1} \partial_i g \overset{\substack{(KAN)\\ \downarrow}}{=} 1$

donc $\partial_i(\sigma_r u) = \sigma_{r-1} \partial_i(u) = 1$

puis $\partial_i g_r = \partial_i(g) = x_i \quad \boxtimes$

Soit $X \in \mathcal{S}$ fibrant, et $* \in X_0$. On note encore $*$ tous les $\sigma_0^n(*) \in X_n$.

Soit $Z_n := \{ x \in X_n \; ; \; \partial_i(x) = * \;\; \forall i \}$ <u>sphère simpliciale</u>

Si $x, x' \in Z_n$ on définit

$$x \sim x' \overset{df}{\iff} \exists y \in X_{n+1} : \partial_i(y) = \begin{cases} * & i < n \\ x & i = n \\ x' & i = n+1 \end{cases}$$

Lm C'est une relation d'équivalence

Dém : - $x \sim x$ en prenant $y = \sigma_n(x)$

- si $x \underset{y'}{\sim} x'$ et $x' \underset{y''}{\sim} x''$ alors

$\underbrace{*, \dots, *, y', y''}_{n+2} \in X_{n+1}$ satisfait (KAN) pour $k = n+2$

(comme on le vérifie).

La condition de Kan fournit un $z \in X_{n+2}$ tel que $\partial_{n+2} z = y''$, $\partial_{n+1} z = y'$, $\partial_i z = *$ $\forall i<n$.

On vérifie alors que $y := \partial_{n+2} z$ fournit $x' \sim x''$ $\boxtimes$

Déf : $\pi_n(X) := Z_n / \sim$ $\quad \forall n \geq 0$.

Prop : $\pi_0(X)$ ensemble
$\pi_n(X)$ groupe (d'homotopie de X) pour $n>0$, X fibrant.

Dém : $\pi_n(X) = \{ \Delta^n \longrightarrow X \ (\text{rel } \partial\Delta^n) \} / \sim$

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r] & X \\ \partial\Delta^n \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \Delta^0 \arrow[u, "*"'] \end{tikzcd}$$

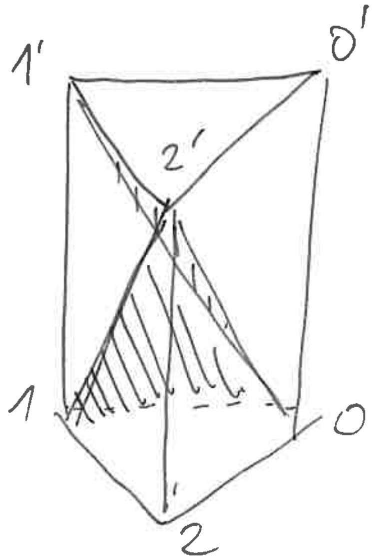
Il reste à voir ceci $\uparrow$.

Quelques remarques :

$\Delta^n \times \Delta^1$ a exactement $n+1$ simplexes non dégénérés de dim $n+1$

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[dr, "f"'] & \Delta^n \times \Delta^1 \arrow[d, "h"] & \Delta^n \arrow[l, "\partial_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$|\Delta^2 \times \Delta^1|$



$P_0 = [0, 0', 1', 2']$

$P_1 = [0, 1, 1', 2']$

$P_2 = [0, 1, 2, 2']$

Chaque P_k a deux n-faces $\in \partial\Delta^n \times \Delta^1$, qui sont consécutives : de la forme $\partial_r P_k$, $\partial_{r+1} P_k$.

Ceci étant vu, soient $x, x' \in Z_m$.

On peut leur associer $f : \Delta^n \xrightarrow{x} X$, $g : \Delta^n \xrightarrow{x'} X$.

Si $x \underset{y}{\sim} x'$ on a $\sigma_0 x, \dots, \sigma_{n-1} x, \underset{\sigma_n x}{\overset{}{y}} \in X_{n+1}$

et ceci fournit une homotopie h entre f et g.

Réciproquement, si $f \sim g$,

P_k homotopie entre $\partial_r P_k$ et $\partial_{r+1} P_k$ (ici il y a un truc à voir)

$$\partial_r P_k \sim \partial_{r+1} P_k \rightsquigarrow \underset{x}{\underset{\parallel}{\partial_0 P_0}} \sim \underset{x'}{\underset{\parallel}{\partial_{n+1} P_0}} \qquad \boxtimes$$

§ Groupes abéliens simpliciaux

Soit G un groupe simplicial, et $* = 1$

$N_m(G) := \{ x \in G_m, \partial_i x = 1 \ \forall i \neq n \} \lhd G_n$.

On vérifie facilement que $\partial_m (N_m) \subseteq N_{m-1}$ et on pose

$$\ker \left(N_m \xrightarrow{\partial_m} N_{m-1} \right) =: Z_m \quad \lhd N_m.$$

$$\mathrm{im} \left(N_{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} N_m \right) =: B_m = \{ x \in Z_m : 1 \sim x \}$$

$$\left[x = \partial_{n+1} y \Rightarrow 1 \underset{y}{\sim} x \right]$$

Lemme Si $x, x', g \in Z_m$ alors $x \sim x' \iff gx \sim gx'$

Dém : $x \underset{y}{\sim} x'$, $\tilde{y} = \sigma_m(g) \cdot y$ $\boxtimes$

Cor : • $B_n \triangleleft Z_n$, et $Z_n/B_n \xrightarrow{\cong} Z_n/\sim \; = \pi_n(G)$

$xB_n \longmapsto [x]$

• $[Z_n, Z_n] \subset B_n \;\; \forall n \geqslant 1$.

On voit que $\pi_n(G)$ est un groupe $\forall n \geqslant 0$
et abélien $\forall n \geqslant 1$

On a réalisé les groupes d'homotopie comme des groupes de cohomologie. En fait :

Th (Dold-Kan-Puppe) $(N_n, (-1)^n \partial_n)$ est un complexe,

et de plus $sAb \xrightarrow{N} Ch_{\geqslant 0}$ est une éq. de catégories.

Aussi, (i) $\pi_*(G) \cong h_*(N_\cdot(G))$ homologie

(ii) homotopie simpliciale $\longleftrightarrow$ homotopie de chaînes

Cor : $\{\pi_n(-)\}_{n \geqslant 0}$ est un δ-foncteur universel.