Groupe de travail
« Géométries algébriques dérivée & supérieure »

Matthieu Romagny
15 novembre 2019

1 Plan du groupe de travail

0) Références.
• DAG et HAG : les références principales pour le groupe de travail sont la thèse de J. Lurie [Lu04] et l'article de survol *Simplicial presheaves and derived algebraic geometry* de B. Toën [To10]. D'autres survols sont utiles : [To09], [To14], [TV04]. Les références pour le développement complet de la théorie sont les articles *Homotopical algebraic geometry* I et II de Toën et Vezzosi [TV05], [TV08] ainsi que les trois livres de Lurie [Lu09], [Lu19a], [Lu19b] ; c'est moins reader-friendly...
• catégories de modèles : [Ci19], [Ho99], [DS95], [Ho13].
• ensembles simpliciaux : [Ci19], [GJ09].
• anneaux simpliciaux : [Ma12], [Lu04], [To10].
• référence en ligne : `https://ncatlab.org/`.

1) Introduction. Théorie d'intersection : formule de Serre pour la multiplicité d'intersection, cf introduction de [Lu04] et [Ko94], § 1.4.2. Théorie des déformations : complexe cotangent, hidden smoothness, modules de fibrés vectoriels ([To09], § 4.1, [TV04], §§ 1.2 et 5.2) Théorie des modules : introduction de [To10], modules de représentations galoisiennes (António).

2) Catégories de modèles et ensembles simpliciaux, 1. Références principales pour les catégories de modèles : [Ci19] chap. 2, principalement §§ 2.2 et 2.3. Références principales pour les ensembles simpliciaux : [GJ09] et [Ci19] chap. 1, principalement §§ 1.2, 1.4, 1.5. Dans cet exposé et le suivant, on introduit les catégories de modèles et on s'appuie et on traite en parallèle les deux exemples fondamentaux des espaces topologiques et des ensembles simpliciaux. Problème général de la localisation d'une classe de morphismes dans une catégorie. Catégorie de modèles. Catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(C)$. Foncteurs dérivés et foncteurs dérivés totaux. Adjonctions de Quillen et conditions pour qu'une adjonction de Quillen induise des équivalences en homotopie, [Ci19], § 2.3, [DS95], § 9. Exemples, en donnant les classes des équivalences faibles, fibrations et cofibrations mais pas de détail : espaces topologiques, ensembles simpliciaux, équivalence $\mathrm{Ho}(\mathrm{Top}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathrm{sSet})$, complexes de modules, anneaux simpliciaux. Références secondaires : Quillen [Qui67], Hovey [Ho99] (textbook), Dwyer et Spaliński [DS95] (survey), Hovey [Ho13] (survey).

3) Catégories de modèles et ensembles simpliciaux, 2. Références principales : Notions de complexes de Kan, ∞-catégories, ∞-groupoïdes. Exemple des catégories via leur nerf. Groupes d'homotopie des complexes de Kan, équivalences d'homotopie faibles, objets hypercomplets (voir hypercomplete object). Théorème de Whitehead sur les équivalences d'homotopie de complexes de Kan. Interprétation catégorique : objets, morphismes, triangles d'un ensemble simplicial, [Ci19] 1.4.2–1.4.8. Adjonction de Quillen sSet $\leftrightarrows$ Top via la réalisation géométrique $|K|$ et le complexe singulier Sing(X), et équivalence de catégories Ho(Top) $\simeq$ Ho(sSet), [GJ09], chap. I, § 11. [Ho13], § 1.

4) ∞-catégories. Problématique de la définition des ∞-catégories : ce sont des objets qui vivent dans une catégorie homotopique (donc un truc de la forme Ho(C)) qui possède plusieurs modèles possibles C, chacun avec ses avantages et ses inconvénients. Parmi les trois modèles les plus étudiés se trouvent : les catégories simplicialement enrichies (voir [TV05], [To14]), les catégories de Segal ([To09]), et les quasi-catégories de Joyal (Lurie [Lu09]). Pour la comparaison entre ces approches voir [Be10] ainsi que les pages nLab quasi categories and simplicial categories et homotopy coherent nerve.

5) Anneaux commutatifs simpliciaux ; algèbre commutative dérivée. Références principales : [Lu04] chap. 3, [To10], section 4, [Ma12]. Catégorie SCR des anneaux commutatifs simpliciaux. Tout groupe simplicial est un complexe de Kan (th. de Moore, voir simplicial group). Structure d'anneau gradué sur $\oplus_i \pi_i(A)$ (voir simplicial ring). Structure de catégorie de modèles sur SCR, adjonction libre/oubli de Quillen. Produit tensoriel dérivé.

6) Complexe cotangent. Références principales : [Lu04], chap. 3 ou [To10], chap. 4. Il s'agit de donner la construction du complexe cotangent et son application à la définition des morphismes lisses et étales.

7) Schémas dérivés. Il y a deux approches possibles. Approche 1 : un schéma dérivé est un topos étale muni d'un faisceau d'anneaux simpliciaux, voir [Lu04] ou [To14], § 2, notamment Déf. 2.1 et les commentaires avant et après. Approche 2 : un schéma dérivé est un faisceau d'ensembles sur la catégorie des anneaux commutatifs simpliciaux, voir [To10], Lecture 5. Un schéma dérivé comme un schéma muni de faisceaux de fonctions nilpotentes qui vivent en degrés homotopiques supérieurs, voir [To14], Definition 2.1 et Remark 2.3. L'approche 1 fonctionne pour définir les champs de Deligne-Mumford dérivés comme ∞-topos étales munis d'un faisceau d'anneaux simpliciaux, voir [Lu04] et [Lu19b]. En revanche, pour définir les champs d'Artin dérivés il faut le point de vue du foncteur de points donné par l'approche 2.

8) Champs algébriques supérieurs. Références principales : [Lu04], chap. 5 ou [To10], chap. 5 et 6.

9) Applications. 1) Gaitsgory and Rozenblyum, Crystals and D-modules. 2) Carchedi, On the étale homotopy type of higher stacks.

2 Blabla introductif

La géométrie algébrique dérivée et la géométrie algébrique supérieure sont des généralisations de la géométrie algébrique dans deux directions différentes, qui peuvent être envisagées simultanément et répondent toutes les deux au besoin rendrent exactes certaines constructions qui ne le sont pas en algèbre commutative et en géométrie algébrique usuelle. Partant des schémas et des espaces algébriques vus comme des foncteurs $\mathrm{Ann}^\circ \to \mathrm{Ens}$, il s'agit d'étendre ces foncteurs aux catégories supérieures : en géométrie dérivée on étend la catégorie de départ aux anneaux commutatifs simpliciaux, et en géométrie supérieure on étend la catégorie d'arrivée aux ∞-catégories.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{\begin{array}{c}\text{schémas}\\ \text{dérivés}\end{array}} \arrow[dr] & \\ \boxed{\text{schémas}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\begin{array}{c}\text{champs algébriques}\\ \text{dérivés supérieurs}\end{array}} \\ & \boxed{\begin{array}{c}\text{champs algébriques}\\ \text{supérieurs}\end{array}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

3 Ensembles simpliciaux

• introduction en suivant par exemple la page wikipedia Simplicial set.

• la catégorie sSet des ensembles simpliciaux ([Ci19], § 1.2). Interprétation géométrique : l'adjonction $|\cdot| : sSet \leftrightarrows Top$: Sing (plus loin on dira que c'est une adjonction de Quillen, qui induit une équivalence en homotopie). Interprétation catégorique : objets, morphismes, triangles d'un ensemble simplicial, [Ci19] 1.4.2–1.4.8.

• ∞-catégories, ∞-groupoïdes, complexes de Kan ([Ci19] 1.5.1). Dessin :

$$\begin{tikzcd} & \text{(groupoïdes)} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \text{(catégories)} \arrow[d, hook, "\text{nerf, [Ci19] 1.4.11 \& 1.4.13}"] & \\ \text{(complexes de Kan)} \arrow[r, equal, "\substack{\text{[Ci19]}\\ \text{1.5.4 \& 3.5.1}}"'] & (\infty\text{-groupoïdes}) \arrow[r, hook] & (\infty\text{-catégories}) \arrow[r, hook] & \text{sSet} \end{tikzcd}$$

Remarques :

l'inclusion (complexes de Kan) $\subset$ (∞-catégories) possède un adjoint à droite, [Ci19] 3.5.3

l'inclusion (∞-catégories) $\subset$ (complexes de Kan) est difficile

• complexes de Kan : ce sont les ensembles simpliciaux fibrants dans la structure de modèles classique sur sSet. Leurs groupes d'homotopie, Goerss-Jardine [GJ09], I.7, ou nLab [nLab1].

• le langage des ∞-catégories ([Lu09], § 1.2) :

∞-catégories, ∞-catégories opposées (1.2.1)

mapping spaces ([Ci19], 7.10.7, [Lu09] 1.2.2.3). Dans sSet, voir [GJ09] I.5 (où mapping space est appelé function complex)

foncteurs entre ∞-catégories ([Ci19] 3.2.10, [Lu09] 1.2.7.3), foncteur pleinement fidèles, foncteurs essentiellement surjectifs, équivalences ([Ci19] 3.9.3, 3.9.7)

la ∞-catégorie des ∞-catégories ([Lu09], § 3, la page nLab), limites et colimites ([Lu09], § 4)

• équivalences d'homotopie faibles ([Ci19], 3.8.5, 3.8.6, 3.8.7, 3.8.14)

• correspondance de Dold-Kan ([Ma11], [Lu19a] § 1.2.3) : quand on parlera de catégories dérivées ?

Remarques sur les complexes de Kan (cf la page wikipedia Kan complex) :
- The underlying simplicial set of a simplicial group is a Kan complex (c'est pourquoi il a toujours des groupes d'homotopie bien définis), [GJ09] I.3.4.
- pour un espace topologique X, son complexe singulier $\mathrm{Sing}(X)$ est la même chose que son ∞-groupoïde fondamental $\Pi(X)$. C'est un complexe de Kan.
- The nerve $N(C)$ of a strict ∞-category is a Kan complex if and only if C is a strict ∞-groupoid.
- le mapping space est un Hom interne dans la catégorie des complexes de Kan [GJ09] I.5.3(1) (dans la catégorie des ensembles simpliciaux c'est le "function complex")
- le nerf d'un groupoïde est un complexe de Kan. On obtient ainsi un plongement (groupoïdes) $\subset$ (complexes de Kan) $\subset$ sSet
- remplacement fibrant, foncteur extension infinie Ex^∞ de Kan, [Ci19], 3.1.17, 3.1.21–3.1.27 Guillou

4 Groupes d'homotopie

- groupes d'homotopie d'un complexe de Kan, Goerss-Jardine [GJ09], I.7
- équivalences d'homotopie = application continue qui possède un inverse en homotopie (sur nLab) versus équivalences d'homotopie faibles = application continue qui induit un iso sur tous les groupes d'homotopie (sur nLab)
- Theorem 4.4.2 (Whitehead). Let X and Y be Kan complexes and $f : X \to Y$ a weak homotopy equivalence. Then f is a homotopy equivalence.
- Theorem 4.5.1 (Milnor). Let X be a Kan complex, and let $\eta_X : X \to \mathrm{Sing}\,|X|$ be the unit of the adjunction $|\ | \dashv \mathrm{Sing}$. Then η_X is a homotopy equivalence.
- groupes d'homotopie d'un espace topologique X. Ce sont les mêmes que les groupes d'homotopie de $\mathrm{Sing}(X)$. From Hovey [Ho13] : « Kan's extensive work led to Milnor's proof that the map $K \to \mathrm{Sing}(|K|)$ is a simplicial homotopy equivalence for Kan complexes K and $|\mathrm{Sing}(X)| \to X$ is a homotopy equivalence for CW complexes X, so that the homotopy theory of simplicial sets is equivalent to the homotopy theory of topological spaces ».
- espaces d'Eilenberg-MacLane $K(G, n)$: pour les espaces topologiques, pour les complexes de modules (via la correspondance de Dold-Kan), pour les anneaux commutatifs simpliciaux (avec structure d'anneau gradué gr-commutatif)
- objets d'Eilenberg-MacLane : voir la page nLab Eilenberg-Mac Lane object

5 Catégories de modèles, foncteurs dérivés

Références : Quillen [Qui67] (référence originale) Hovey [Ho99] (textbook), Dwyer et Spaliński [DS95] (survey), Hovey [Ho13] (survey), Cisinski [Ci19], § 2 (traitement compact et efficace).

Plan de l'exposé :

- problème général de la localisation d'une classe de morphismes dans une catégorie,

- définition de catégorie de modèles C ; catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(C)$; le foncteur $C \to \mathrm{Ho}(C)$ réalise $\mathrm{Ho}(C)$ comme la localisation par rapport aux équivalences faibles, [Ci19], § 2.2

- extensions de Kan à gauche, extensions de Kan à droite.

- foncteurs dérivés, foncteurs dérivés totaux

- adjonctions de Quillen, conditions pour qu'une adjonction de Quillen induise des équivalences en homotopie, [Ci19], § 2.3, [DS95], § 9

- limites et colimites homotopiques, [Ci19] § 2.3 à partir de 2.3.10, [DS95] § 10, [Du17], Part 1, § 2

6 Exemples

6.1 Ensembles simpliciaux

• [Ho99], § 3.2, [DS95], § 11, [nLab3]

• Groupes d'homotopie d'un complexe de Kan, [GJ09], I.7, [Ho99], § 3.4. Via le π_0 des loop space itérés, [Ci19], 3.1.30, 3.8.1. Noter le lien avec la définition topologique, [Ci19] (3.8.8.6). Utilisant Ex^∞ on peut ensuite étendre la déf des π_n à tout ensemble simplicial, [Ci19] 3.8.6

• structure de modèles de Joyal, [Ci19] § 3.3. Adjonction de Quillen avec la structure de modèles canonique sur Cat, [Ci19] 3.3.14

6.2 Espaces topologiques

[Ho99], § 2.4, [DS95], § 8. Théorème de Quillen : $\mathrm{Ho}(Simpl) \simeq \mathrm{Ho}(Top)$ via complexe singulier et réalisation géométrique

Groupes d'homotopie d'un espace topologique. Les groupes d'homotopie d'un complexe de Kan sont égaux à ceux de sa réalisation géométrique

6.3 Anneaux commutatifs simpliciaux

[To10], § 4.1, [Ma12], [Ma11]

Groupes d'homotopie d'un anneau commutatif simplicial, structure d'anneau gradué gr-commutatif.

6.4 Complexes de R-modules

[Ho99], § 2.4, [DS95], § 7.

[DS95], [nLab4], [Ho01].

Lien avec l'algèbre homologique : la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne A est la catégorie homotopique de la catégorie des complexes d'objets de A, munie d'une certaine structure de catégorie de modèles, cf [Ho01]. Lien avec le calcul des Ext, [DS95], § 7.3

6.5 Exemple 4 : faisceaux simpliciaux sur un site avec intervalle ($\mathbb{A}^1$-homotopie de Morel et Voevodsky)

(Just to mention)

7 Anneaux commutatifs simpliciaux

8 Complexe cotangent

Pour un cours de topologie algébrique avec une présentation orientée vers l'algèbre homotopique de Quillen : [May99].

La page wikipedia pour DAG contient des liens vers plusieurs groupes de travail sur DAG.

Références

[Be10] J. Bergner, *A survey of* $(\infty, 1)$*-categories*, Towards higher categories, 69–83, IMA Vol. Math. Appl. 152, Springer, 2010.

[Ci19] D.-C. Cisinski, *Higher categories and homotopical algebra*, Cambridge University Press, 2019.

[DS95] W. G. Dwyer, J. Spaliński, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology, editor I. M. James, 73–126, North-Holland, 1995. Accessible ici

[Du17] D. Dugger, *A primer on homotopy colimits*, `http://math.uoregon.edu/~ddugger/hocolim.pdf`

[GJ09] P. Goerss, R. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, 2009.

[Ho99] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs 63, AMS, 1999.

[Ho01] M. Hovey, *Model category structures on chain complexes of sheaves*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 6, 2441–2457.

[Ho13] M. Hovey, *Quillen model categories*, J. K-Theory 11 (2013), no. 3, 469–478.

[Jo02] A. Joyal, *Quasi-categories and Kan complexes*, Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly, J. Pure Appl. Algebra 175 (2002), no. 1-3, 207–222.

[Ko94] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions*, The moduli space of curves (Texel Island, 1994), 335–368, Progr. Math. 129, Birkhäuser, 1995.

[Lu04] J. Lurie, *Derived algebraic geometry*, PhD Thesis, MIT, 2004.

[Lu09] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of mathematics studies 170, Princeton University Press, 2009.

[Lu19a] J. Lurie, *Higher algebra*, preprint, 2019.

[Lu19b] J. Lurie, *Spectral algebraic geometry*, en préparation, 2019.

[Ma11] A. Mathew, *The Dold-Kan correspondence*, notes de groupe de travail, `http://math.uchicago.edu/~amathew/doldkan.pdf`

[Ma12] A. Mathew, *Simplicial commutative rings 1*, notes de groupe de travail, `http://math.uchicago.edu/~amathew/SCR.pdf`

[nLab1] The nLab, Simplicial homotopy group

[nLab2] The nLab, Kan complex (contains a definition of the fundamental ∞-groupoid of a space)

[nLab3] The nLab, Model structure on simplicial sets

[nLab4] The nLab, Model structure on chain complexes

[May99] P. May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1999.

[Qui67] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Springer lecture notes in mathematics 43, 1967.

[To05] B. Toën, *Vers une axiomatisation de la théorie des catégories supérieures*, K-Theory (2005), 34(3) :233–263.

[To09] B. Toën, *Higher and derived stacks : a global overview*, Algebraic geometry Seattle 2005, Part 1, 435–487, Proc. Sympos. Pure Math., 80, Part 1, Amer. Math. Soc., 2009.

[To10] B. Toën, *Simplicial presheaves and derived algebraic geometry*, in I. Moerdijk, B. Toën, *Simplicial methods for operads and algebraic geometry*, Birkhäuser, 2010.

[To14] B. Toën, *Derived algebraic geometry*, EMS Surv. Math. Sci. 1 (2014), 153–240.

[TV05] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory*, Adv. Math. 193 (2005), no. 2, 257–372.

[TV08] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. 193 (2008), no. 902, x+224 pp.

[TV04] B. Toën, G. Vezzosi, *From HAG to DAG : derived moduli stacks*, Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory, 173–216, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. 131, Kluwer Acad. Publ., 2004.