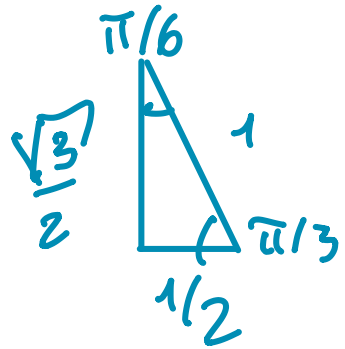


Exemple 5.6

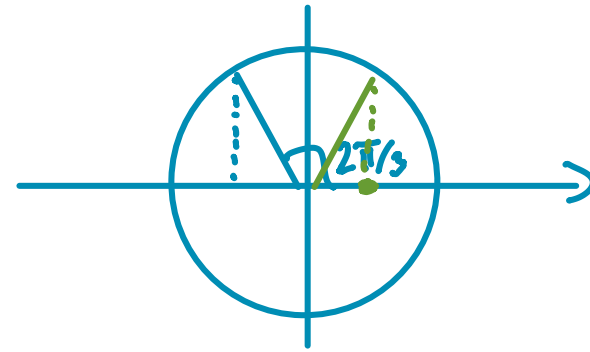
i) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2)$,

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \right). \text{ On a } f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$



$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in f^{-1}(\{0\}).$$

Localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $f^{-1}(\{0\})$ est-il le graphe d'une fonction $\varphi(x)$ ou $\psi(y)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cos(x^2), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq 0 \Rightarrow \text{c'est le graphe d'une fonction } \psi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \sin(y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{2\pi} \neq 0 \\ \Rightarrow \text{c'est aussi le graphe d'une fonction } \varphi(x).$$

On a le choix! go avec $\varphi(x)$;

$$\exists \varphi \text{ s.t. } \varphi(\tilde{x}) = \tilde{y} \quad \text{i.e.} \quad \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\bullet \quad f(x, \varphi(x)) = 0$$

De plus, $\varphi'(\tilde{x}) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y})} = \frac{-\sqrt{\frac{1}{2}}}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$$(ii) \quad f(x, y) = x - y^3, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0) \quad . \quad f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0.$$

$\Rightarrow f^{-1}(\{0\})$ est le graphe d'une fonction $\psi(y)$.

Question: Le fait que $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

$\stackrel{?}{\Rightarrow} \nexists \varphi \text{ tq } \varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}, \quad f(x, \varphi(x)) = 0.$

Pas en général. 3 choses peuvent se passer

- pas le graphe d'une fonction, (Exemples 5.2 (ii), (iii))
 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$
- Le graphe d'une fonction, mais pas C^1 : ici, par exemple $y = \sqrt[3]{x}$ qui n'est pas dérivable en $\tilde{x} = 0$.
- Le graphe d'une fonction C^1 : $x^3 - y^3$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$
 $x=y$ malgré le fait que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Par contre ici, $\psi(y) = y^3$.

Théorème 5-7 (Fonctions implicites dans $\mathbb{R}^3$)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in D$, $f \in C^1(D)$ et
 $h = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

(i) Si $\frac{\partial f}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$, alors, localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$,

l'ensemble de niveau h de f est le graphe
d'une fonction $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$ de classe C^1 tq

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{z}, \quad f(x, y, \varphi(x, y)) = h.$$

Plus précisément, $\exists a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $a < \tilde{x} < b$,
 $c < \tilde{y} < d$, $\alpha < \tilde{z} < \beta$ tq

$$f^{-1}(\{k\}) \cap]a, b[\times]c, d[\times]\alpha, \beta[= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in]a, b[\times]c, d[, \\ z = \varphi(x, y)\}$$

(ii) Si $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$, alors, localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$,

l'ensemble de niveau k de f est le graphe d'une fonction $\varphi(x, z)$ de classe C^1 tq
 $\varphi(\tilde{x}, \tilde{z}) = \tilde{y}$, $f(x, \varphi(x, z), z) = k$.

Plus précisément, $\exists a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $a < \tilde{x} < b$, $c < \tilde{z} < d$
 $\alpha < \tilde{y} < \beta$, $\varphi \in C^1(]a, b[\times]c, d[)$ tq

$$f^{-1}(\{k\}) \cap]a, b[\times]\alpha, \beta[\times]c, d[= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in]a, b[\times]c, d[, \\ y = \varphi(x, z)\}$$

(iii) Si $\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$, alors, localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, l'ensemble de niveau h de f est le graphe d'une fonction $\eta(y, z)$ tq
 $\eta(\tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{x}$ et $f(\eta(y, z), y, z) = h$.
Plus précisément...

§ 5.2 Droite et plan tangent à un ensemble de niveau

Méthode 5.8 ($n=2$, droite tangente à une courbe de niveau)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f \in C^1(D)$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$ tq $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (0,0)$ et $c = f(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Alors, la droite d'équation $\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}); (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) \rangle = 0$ est la droite tangente à l'ensemble de niveau c de f en $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Pourquoi? Si $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$, $f^{-1}(\{c\}) \cap \dots = \{(x, y) : x \in \dots, y = \varphi(x)\}$
Droite tangente au graphe de φ au point $(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) = (\tilde{x}, \tilde{y})$

$$y = \underbrace{\varphi(\tilde{x})}_{=\tilde{y}} + \underbrace{\varphi'(\tilde{x})(x - \tilde{x})}_{= - \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y})}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$\Leftrightarrow y - \tilde{y} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} (x - \tilde{x}) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})(y - \tilde{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})(x - \tilde{x})$$

$$\Leftrightarrow \langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}); (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) \rangle = 0.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$, idem, mais avec $\psi(y)$.

Exemple 5.9

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $c = f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$.

La droite tangente à $\{(x, y) : f(x, y) = 1\}$ en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est la droite d'équation

$$\langle \nabla f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (x - \frac{1}{\sqrt{2}}, y - \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = 0 \quad | \quad \nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\Leftrightarrow \langle (\sqrt{2}, \sqrt{2}); (x - \frac{1}{\sqrt{2}}, y - \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = 0 \quad | \quad \nabla f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2 = 0$$

Remarque 5.10 (graphe $\rightarrow$ ensemble de niveau)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, le graphe de f , $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ est l'ensemble de niveau de la fonction

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = y - f(x)$

Méthode 5.11 ($n=3$, plan tangent à une surface de niveau)

Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, $f \in C^1(D)$, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in D$ tq
 $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$ et $c = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Alors, le plan d'équation $0 = \langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}, z - \tilde{z}) \rangle$
est le plan tangent à la surface $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$
en $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Même raison que pour la droite tangente à une
courbe de niveau.

Exemple 5.12 :

Soit la surface $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6 \}$

Calculer l'équation du plan tangent à S en $(-1, 1, 1)$.

Soit $f(x, y, z) = x^4 + y^2 + 4z^2$. S est l'ensemble de niveau 6 de f .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1, 1) = -4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 8z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(-1, 1, 1) = 2.$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(-1, 1, 1), (x+1, y-1, z-1) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(x+1) + 2(y-1) + 8(z-1) = 0$$

$\Leftrightarrow -2x + y + 4z - 7 = 0$ est le plan tangent à S en $(-1, 1, 1)$.

Remarque 5.13 : (Graphe $\rightarrow$ ensemble de niveau)

Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, son graphe $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ est l'ensemble de niveau 0 de la fonction $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

Chapitre 6: Étude de fonctions & optimisation

§ 6.1: Intro et étude locale

Définition 6.1 min/max / extremum local.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble, $x_0 \in E$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que
(i) $\tilde{x}$ est un minimum local si $\exists \delta > 0$ tq

$$\forall x \in E \cap B(\tilde{x}, \delta), \quad f(x) \geq f(\tilde{x}).$$

(ii) $\tilde{x}$ est un maximum local si $\exists \delta > 0$ tq

$$\forall x \in E \cap B(\tilde{x}, \delta), \quad f(x) \leq f(\tilde{x}).$$

(iii) $\tilde{x}$ est un extremum local si c'est un min ou un max local.

(iv) $\tilde{x}$ est un minimum global si $\forall x \in E, f(x) \geq f(\tilde{x})$

(v) $\tilde{x}$ est un maximum global si $\forall x \in E, f(x) \leq f(\tilde{x})$.

(vi) $\tilde{x}$ est un extremum global si c'est un min ou un max global.

(vii) f prend son maximum (resp. son minimum) si $\exists \tilde{x} \in E$ tq $\tilde{x}$ est un maximum (resp. minimum) global.

Proposition 6.2 :

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, borné et $f \in C^0(E)$

Alors, f prend son min & son max sur E .

Remarque 6.3 (Pour les puristes)

Dans notre définition de fonctions continues, le domaine de f devait être ouvert. Qu'est-ce que c'est une fonction continue sur un fermé? Il en existe "plusieurs"
...

Pour nous: $\exists D \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $g \in C^0(D)$ tq $\forall x \in E$,
 $f(x) = g(x)$.

Proposition 6.4 (Extremum local condition nécessaire)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{x} \in \text{int } E$. Si $\tilde{x}$ est un extremum local de f et les dérivées partielles de f existent en $\tilde{x}$, $\nabla f(\tilde{x}) = 0$.

Définition 6.5: Point stationnaire.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{x} \in \text{int } E$. $\tilde{x}$ est un point stationnaire de f si toutes les dérivées partielles de f existent en $\tilde{x}$ et $\nabla f(\tilde{x}) = 0$.

Définition 6.6 : Point selle

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{x} \in \text{int } E$. On dit que

$\tilde{x}$ est un point selle de f si

- (i) $\tilde{x}$ est un point stationnaire de f
- (ii) $\tilde{x}$ n'est ni un max ni un min local.

i.e. (i) $\nabla f(\tilde{x}) = 0$,

(ii) $\forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in B(\tilde{x}, \delta) \cap E$ tq $f(x_1) < f(\tilde{x}) < f(x_2)$

Définition 6.7 Matrice Hessienne

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert $f \in C^2(D)$, $\tilde{x} \in D$. La matrice hessienne de f en $\tilde{x}$, notée $H_f(\tilde{x})$ est la matrice des dérivées d'ordre 2 :

$$H_f(\tilde{x}) = \nabla (\nabla f)(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Δf
champ scalaire

matrice jacobienne
gradient
 H_f est la mat. jacobienne du gradient de f .

$$\text{Si } n=2, \quad H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } n=3, \quad H_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Remarque 6.8:

- (i) Un que $f \in C^1$, la règle de Schwarz (thm 4.19) assure que H_f est une matrice symétrique.
- (ii) On peut vérifier que le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $\tilde{x}$ s'écrit

$$P_2(x) = f(\tilde{x}) + \underbrace{\nabla f(\tilde{x}) (x - \tilde{x})^T}_{= \langle \nabla f(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \rangle} + \frac{1}{2} (x - \tilde{x}) H_f(\tilde{x}) (x - \tilde{x})^T$$

Théorème 6.9 Extremum local condition suffisante.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \text{int} E$ un point stationnaire de f . Supposons que f est de classe C^2 dans un voisinage de $\tilde{x}$.

(i) si toutes les valeurs propres de $H_f(\tilde{x})$ sont strictement positives, $\tilde{x}$ est un minimum local de f .

(ii) si toutes les valeurs propres de $H_f(\tilde{x})$ sont strictement négatives, $\tilde{x}$ est un maximum local de f .

(iii) si toutes les valeurs propres de $H_f(\tilde{x})$ sont non-nulles, mais qu'il y en a au moins une positive et une négative, $\tilde{x}$ est un point selle.

(iv) si 0 est une valeur propre de $H_f(\tilde{x})$, on ne peut rien dire.

Remarque 6.10 (Sur les valeurs propres d'une matrice 2×2)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

En particulier, si $\boxed{n=2}$

$$(i) \det(A) < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \text{ ou } \lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

$$(ii) \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 0$$

$$(iii) \det(A) > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \text{ ou } \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

$$\downarrow \\ \operatorname{tr}(A) > 0$$

$$\downarrow \\ \operatorname{tr}(A) < 0$$

Donc, si $f \in C^2(E)$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{int } E$ est un point stationnaire, alors,

(i) $\det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) > 0$, $\text{tr}(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) > 0$
 $\Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ est un min local de f .

(ii) $\det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) > 0$, $\text{tr}(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) < 0$
 $\Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ est un max local

(iii) $\det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) < 0$
 $\Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ est un point selle

(iv) $\det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) = 0 \rightarrow$ thm 6.9 ne permet pas de conclure.

Exemples 6.11

(i) proto exemple : $f(x, y) = \frac{1}{2} \lambda_1 x^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 y^2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$

(illus en (0,0) : $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ min local, $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ max local,
 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \Rightarrow$ point selle)

Étape 1 : Points stationnaires.

$$\nabla f(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y). \quad \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$$

Étape 2 : Nature des pts stationnaires

$$H_f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ sont les valeurs propres de } H_f(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \xRightarrow{\text{thm 6.9}} \text{min local}, \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0 \xRightarrow{\text{thm 6.9}} \text{max local}, \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \text{ ou } \lambda_2 < 0 < \lambda_1 \xRightarrow{\text{thm 6.9}} \text{point selle}.$$

(ii) $\det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) = 0$, tout peut arriver.

Étape 1 pts stationnaires $\nwarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$

Soit $f(x, y) = \lambda_1 x^4 + \lambda_2 y^4$. $\nabla f(x, y) = (4\lambda_1 x^3, 4\lambda_2 y^3)$

$$\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0) \Leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0).$$

Étape 2 : Nature des points stationnaires:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 12\lambda_1 x^2 & 0 \\ 0 & 12\lambda_2 y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ thm 6.9 ne permet pas de conclure.

Étape 3: Étude "à la main"

On a $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$.

$$\text{Si } \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad f(x, y) = \underbrace{\lambda_1 x^4}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda_2 y^4}_{\geq 0} \geq 0 = f(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$\Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ est un min local (en vrai, global)

$$\text{Si } \lambda_1, \lambda_2 < 0, \quad f(x, y) = \underbrace{\lambda_1 x^4}_{\leq 0} + \underbrace{\lambda_2 y^4}_{\leq 0} \leq 0 = f(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$\Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ est un max local (en vrai, global)

Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, on a, $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$f(t, 0) = \underbrace{\lambda_1}_{< 0} \underbrace{t^4}_{> 0} < 0 = f(0, 0) < 0 = \underbrace{\lambda_2}_{> 0} \underbrace{t^4}_{> 0} = f(0, t)$$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0, \exists \underbrace{(x_1, y_1)}_{(\frac{\delta}{2}, 0)}, \underbrace{(x_2, y_2)}_{(0, \frac{\delta}{2})} \in \mathcal{B}((0, 0), \delta) \text{ tq } f(x_1, y_1) < f(0, 0) < f(x_2, y_2)$$

$\Rightarrow (0, 0)$ est un point selle

$\leadsto$ il peut bien se penser à un point quasi

(iii) $f(x, y) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2xy - y^2$.

Étape 1 : pts stationnaires.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 2y$$

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2y = 0 & (1) \\ 2x - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \iff x = y$$

$$(1) \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \iff 4x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\iff 4x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\iff x = 0, 1 \text{ or } 2.$$

$\Rightarrow$ Les pts stationnaires sont en $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0), (1, 1), (2, 2)$.

Étape 2: Nature des pts stationnaires.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 24x + 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(0,0): $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\det = -12 - 4 = -16 < 0$
 $\rightarrow$ pt selle.

(1,1): $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 - 24 + 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det = 12 - 4 = 8 > 0$$

$$\text{tr} = -8 \Rightarrow \text{max local}$$

$$\underline{(2,2)}: H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 6(8-8+1) & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

idem qu'en (0,0)
 $\rightarrow$

$$\det = -16 < 0 \rightarrow \text{point-selle}$$

§ 6.2 Optimisation sous contrainte, multiplicateurs de Lagrange

Contexte: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g \in C^1(D)$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$,

On suppose $E \neq \emptyset$, $\forall x \in E$, $\nabla g(x) \neq 0$.

But: trouver le min/max _{loc.} de f sur E .

⚠ $\nabla g(x) \neq 0 \xrightarrow{\text{TFI}} E$ est ^{loc.} le graphe d'une fonction $\Rightarrow \text{int } E = \emptyset$

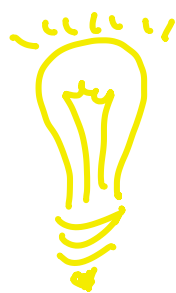
Théorème 6.12

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g \in C^1(D)$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$.

Supposons $E \neq \emptyset$ et $\forall x \in E$, $\nabla g(x) \neq 0$.

Si $\tilde{x}$ est un extremum local de f sur E , alors,

$$\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R} \text{ tq } \nabla f(\tilde{x}) = \bar{\lambda} \nabla g(\tilde{x}) \quad \left(\begin{array}{c} \nabla f(\tilde{x}), \nabla g(\tilde{x}) \\ \text{sont colinéaires} \end{array} \right)$$



$n=2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0 \Rightarrow$ autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $E = \{(x, y) :$

$y = \varphi(x)\}$. $\bar{\Phi}(x) = f(x, \varphi(x))$, on a $(x, \varphi(x)) \in E$,

$\bar{\Phi}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow \tilde{x}$ est un extr.

local de $\bar{\Phi}$.

$$\Rightarrow 0 = \Phi'(\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \varphi'(\tilde{x}) \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Also, si $\boxed{\bar{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}}$, on a

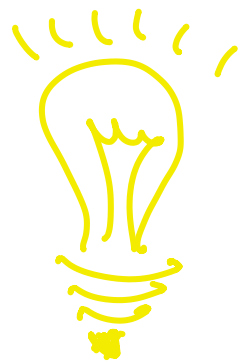
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{\lambda} \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

i.e. $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bar{\lambda} \nabla g(\tilde{x}, \tilde{y})$

Corollaire 6.13

Soient E, D, f, g comme ci-dessus et $L: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$.

Si $\tilde{x} \in E$ est un extremum local de f sur E
 $\exists \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ tq $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ est un point stationnaire
 de L



Si $\bar{\lambda}$ est tq $\nabla f(\tilde{x}) = \bar{\lambda} \nabla g(\tilde{x})$, et $\tilde{\lambda} = -\bar{\lambda}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\tilde{x}, \bar{\lambda}) = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_1} - \bar{\lambda} \frac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_1} = 0$$

(1^{ère} comp. de $\nabla f(\tilde{x}) - \bar{\lambda} \nabla g(\tilde{x}) = 0$)

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x}) - \tilde{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_n}(\tilde{x}) \quad \left(\text{c'est comp. de } \nabla f(\tilde{x}) - \tilde{\lambda} \nabla g(\tilde{x}) \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = -g(\tilde{x}) = 0 \quad (\text{car } \tilde{x} \in E)$$

Exemple 6.14

(i) $n=2$ Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \cdot y$.

Trouver la valeur maximale de f sous la contrainte

$$2x^2 + y^2 = 4. \quad \text{Soit } g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4,$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$= xy + \lambda(2x^2 + y^2 - 4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow y + 4\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y \cdot (1) - 2x \cdot (2) : y^2 - 2x^2 = 0 \\ (3) \Leftrightarrow y^2 = 4 - 2x^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y \cdot (1) - 2x \cdot (2) : y^2 - 2x^2 = 0 \\ (3) \Leftrightarrow y^2 = 4 - 2x^2 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x^2 &= 4 - 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \\ \Rightarrow x &= -1 \text{ or } +1, \end{aligned}$$

$$\boxed{x = -1} \quad y^2 = 4 - 2(-1)^2 = 2 \Rightarrow y = -\sqrt{2} \text{ or } \sqrt{2}.$$

$$\rightarrow (x, y) = (-1, -\sqrt{2}) \text{ or } (-1, \sqrt{2})$$

$$\boxed{x = 1} \quad y^2 = 4 - 2 \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow y = -\sqrt{2} \text{ or } \sqrt{2}.$$

$$\rightarrow (x, y) = (1, -\sqrt{2}) \text{ or } (1, \sqrt{2})$$

$\Rightarrow$ min & max de f sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 4$
sont parmi $f(-1, -\sqrt{2})$, $f(-1, \sqrt{2})$, $f(1, -\sqrt{2})$ et
 $f(1, \sqrt{2})$.

$$f(-1, -\sqrt{2}) = \sqrt{2},$$

$$f(1, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$f(-1, \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$f(1, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{max} &= \sqrt{2} \\ \text{min} &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Rem: trouver la valeur de λ n'est pas nécessaire!

(iii) $n=3$ Soit $f(x, y, z) = x + y + z$ Trouver min & max

de f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\text{Soit } g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 1 + 2\lambda x = 0 \quad (1) \quad \text{Si } \lambda = 0, \quad x = 0 \notin$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 1 + 2\lambda y = 0 \quad (2) \quad \text{Si } \lambda \neq 0, \quad (1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} : 1 + 2\lambda z = 0 \quad (3) \quad (3) \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{3}{4\lambda^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ou } \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x=y=z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x=y=z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le min et le max de f se trouvent parmi
 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$ et $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}$

Généralisation / méthode 6.15 Méthode des multi-
 cateurs de Lagrange, plusieurs contraintes:

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \leq n$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(D)$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n$.

$\forall 1 \leq j \leq m, g_j(x) = 0\}$.

Supposons que $E \neq \emptyset$, et $\forall x \in E$, $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)$ sont

linéairement indépendantes.

Alors, si $\tilde{x} \in E$ est un extremum local de f sur E ,
 $\exists \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m \in \mathbb{R}$ tq $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$ est un point

stationnaire de $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$

$$= f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x).$$

$\rightarrow$ essentiellement on va utiliser pour $n=3$, $m=2$.

Exemple 6.16

Soit $f(x, y, z) = x + y + z$. On cherche min et max de f
sous les contraintes $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y = 1$

$$\text{Soit } \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x - y - 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 1 + 2\lambda x + \mu = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 1 + 2\lambda y - \mu = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} : x - y - 1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} : 1 + 2\lambda z = 0 \quad (3)$$

$$\text{Si } \lambda = 0 \quad (3) \Rightarrow 1 = 0 \quad \text{et} \quad \Rightarrow \lambda \neq 0.$$

$$(1) : x = \frac{-1 - \mu}{2\lambda} \quad (3) : z = \frac{-1}{2\lambda}$$

$$(2) : y = \frac{-1 + \mu}{2\lambda} \quad (5) : \frac{-1 - \mu}{2\lambda} + \frac{-1 + \mu}{2\lambda} = 1 \Rightarrow -\frac{\mu}{\lambda} = 1$$

$$\Rightarrow \mu = -\lambda$$

$$(4): \left(\frac{\lambda-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\lambda^2 - \cancel{2\lambda} + 1 + \lambda^2 + \cancel{2\lambda} + 1 + 1 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} = 0$$

$$-2\lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ or } \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}}} : x = \frac{-1 - \sqrt{\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$z = -\frac{1}{-2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x + y + z \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}} : x = \frac{-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$z = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$f(x, y, z) = x + y + z =$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\frac{-\sqrt{2} + \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{2} - \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \min = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \max = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

§ 6.3 : Étude globale

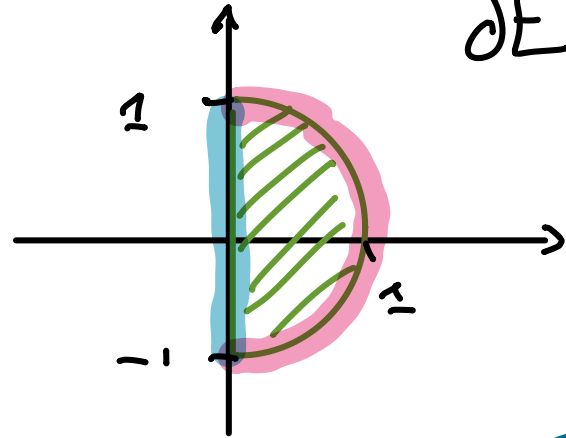
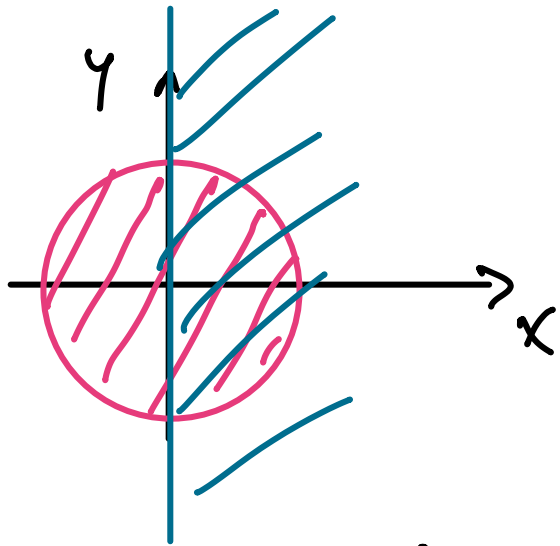
Contexte : Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On veut trouver un max de f sur ∂D

→ faire explicitement le travail du TFI pour le bord

Exemple 6.17 : Méthode par substitution/paramétrisation

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y + 2x$ $n=2$



$$\partial E = \overline{T_1} \cup \overline{T_2}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x=0, y \in [-1, 1]\}$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{1-y^2}, y \in [-1, 1]\}$$

$$g_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto g_1(y) = f(0, y)$$

$$g_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto g_2(y) = f(\sqrt{1-y^2}, y)$$

⇒ on va faire l'étude de

qui sont des fonctions du style $g_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on
seul traiter de l'analyse I !

$$g_1(y) = f(0, y) = y, \quad y \in [-1, 1]$$

pts stationnaires de g_1 : $g_1'(y) = 1$, y en a pas

pts du bord: $g_1(-1) = -1$, $g_1(1) = 1$

$$g_2(y) = f(\sqrt{1-y^2}, y) = y + 2\sqrt{1-y^2}, \quad y \in [-1, 1]$$

pts stationnaires de g_2 : $g_2'(y) = 1 - \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}}$

$$g_2'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} = 1 \Rightarrow \frac{4y^2}{1-y^2} = 1 \Rightarrow 5y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(en vrai, seulement $y = +\frac{1}{\sqrt{5}}$, mais si on a trop, c'est pas grave!)

$$g_2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad g_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$$

pts au bord: $g_2(-1) = -1 + \sqrt{1-1} = -1$, $g_2(1) = 1 + \sqrt{1-1} = 1$.

$\Rightarrow$ min & max de f sur ∂E sont parmi

$$\left\{-1, 1, \frac{3}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right\} \Rightarrow \max \text{ de } f \text{ sur } \partial E = \sqrt{5}, \min \text{ de } f \text{ sur } \partial E = -1.$$

Exemple 6.17 Méthode par multiplicateurs de Lagrange pour le bord.

Soit $E = \bar{B}((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y + 2x$

$$\partial E = \partial B((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = g^{-1}(\{0\})$$

avec $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x,y,\lambda) = y + 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 2 + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 1 + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} : x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$y \cdot (1) - x \cdot (2) :$$

$$2y - x = 0 \Rightarrow x = 2y$$

$$(3) \rightarrow 4y^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{5}}}, \quad x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{5}}}, \quad x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ min de f sur ∂E est $-\sqrt{5}$ et max de f sur ∂E est $\sqrt{5}$

How to choose methods?

Méthode 6.18 : Étude globale.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ fermé, borné, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, continue

Par la proposition 6.2, f prend son min et son max sur E .

Étape 1 : On détermine tous les points stationnaires de f dans int E .

Étape 2 : On détermine min & max de f sur ∂E

Étape 3 : comparaisons. ⚠ considérer que ds $x \in E$.

$$\max_{x \in E} f(x) = \max \left(\{f(x) : x \in \text{int } E, \nabla f(x) = 0\} \cup \left\{ \max_{x \in \partial E} f(x) \right\} \right)$$

$$\min_{x \in E} f(x) = \min \left(\{f(x) : x \in \text{int } E, \nabla f(x) = 0\} \cup \left\{ \min_{x \in \partial E} f(x) \right\} \right)$$

Exemple 6.19:

Soit $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y - x \leq 2, x + y \leq 2\}$

Trouver min & max de f sur E

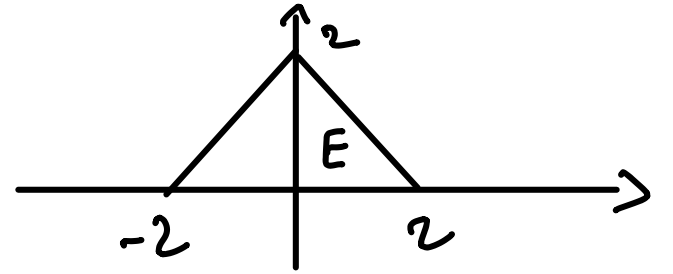
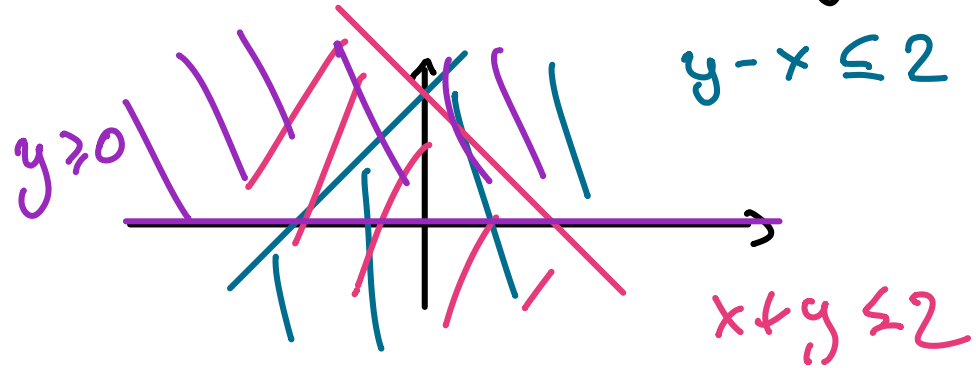
pts stationnaires dans int E

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

$$\textcircled{x=0} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = +1$$

$(0, -1) \notin E \rightarrow$ on oublie!, $(0, 1) \in E$, $f(0, 1) = 0$



$$(y=0) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1, \text{ ou } x = 1$$

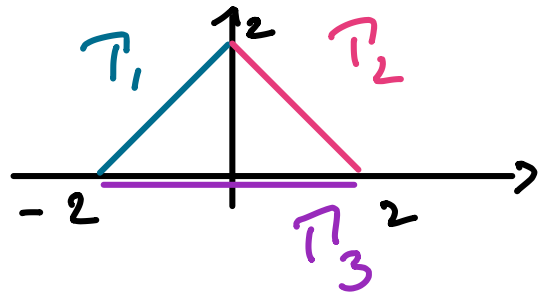
$$(-1, 0) \in \partial E \text{ (pas obligé)}$$

$$f(-1, 0) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$(1, 0) \in \partial E \text{ (pas obligé)}$$

$$f(1, 0) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

∂E :



$$\begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x + y \leq 2 \Rightarrow 2x + 2 \leq 2 \Rightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y - x = 2, x + y \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0], y = x + 2\}$$

$$g_1 : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R} : g_1(x) = f(x, x+2) = \frac{1}{3}x^3 + x(x+2)^2 - x = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 3x$$

$$g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \in [-2, 0] \quad g_1\left(-\frac{3}{2}\right) = 0, \quad -\frac{1}{2} \in [-2, 0], \quad g_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$g_1(-2) = -\frac{2}{3}, \quad g_1(0) = 0$$

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y - x \leq 2, x + y = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], y = 2 - x\}$$

$$g_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g_2(x) = f(x, 2-x) = \frac{1}{3}x^3 + x(2-x)^2 - x$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3x$$

$$g_2'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \in [0, 2] \rightarrow g_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2} \in [0, 2] \rightarrow g_2\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$g_2(0) = 0, \quad g_2(2) = \frac{2}{3}$$

$$T_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, y-x \leq 2, y+x \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, x \in [-2, 2]\}$$

$$g_3: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g_3(x) = f(x, 0) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

$$g_3'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ or } x = +1$$

$$-1 \in [-2, 2], g_3(-1) = \frac{2}{3}, \quad 1 \in [-2, 2], g_3(1) = -\frac{2}{3}$$

$$g_3(-2) = -\frac{2}{3}, \quad g_3(2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \max_{(x, y) \in E} f(x, y) = \max \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$\min_{(x, y) \in E} f(x, y) = \min \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3} \right\} = -\frac{2}{3}$$

Chapitre 7 Les intégrales multiples

§ 7.1: Intégrales doubles sur des rectangles et des domaines simples

Définition 7.1

(i) Soit $a < b$, $c < d$, $E = [a, b] \times [c, d]$ et $f \in C^0(E)$

L'intégrale double de f sur E est

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

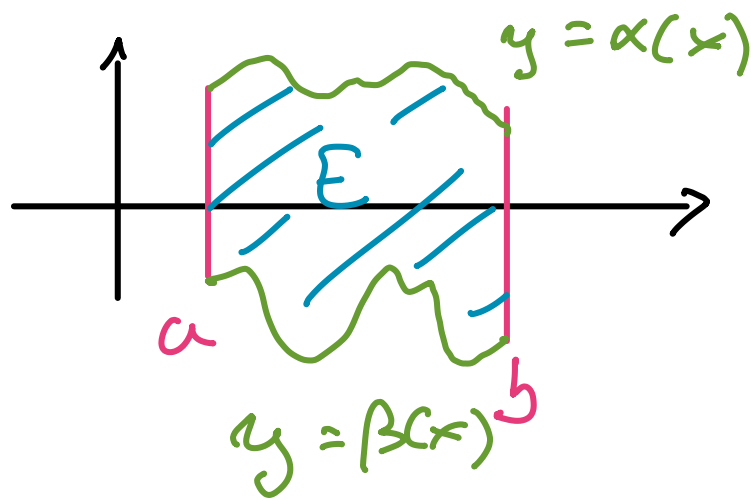
(ii) Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé, borné.

E est y-simple si $\exists a < b$, $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues
telles que $\bullet \forall x \in]a, b[, \alpha(x) < \beta(x)$

$$\bullet E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$$

Soit encore $f \in C^0(E)$. L'intégrale double de f
sur E est

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx$$



(iii) Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$, fermé, borné. E est x -simple si $\exists c < d$,
 $\mu, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continues tq

- $\forall y \in]c, d[, \mu(y) < \delta(y)$
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \mu(y) \leq x \leq \delta(y)\}$

Soit encore $f \in C^0(E)$. L'intégrale de f sur E est alors

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\mu(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx dy$$

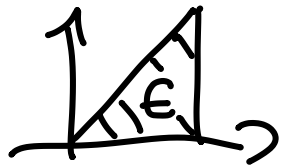
Remarque 7.2

Beaucoup d'ensembles sont à la fois x -simple & y -simple. Les deux définitions de l'intégrale coïncident dans ce cas.

Exemples 7.3

(i) $E = [0, 1] \times [3, 5]$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + \frac{1}{2}y$

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_3^5 x^2 + 4xy + \frac{1}{2}y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + 2x y^2 + \frac{1}{4} y^2 \right]_{y=3}^{y=5} dx \\ &= \int_0^1 2x^2 + 32x + 4 \, dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + 16x^2 + 4x \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 20. \end{aligned}$$

(ii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$ 

$f(x, y) = xy$. E est y -simple : $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = x$.

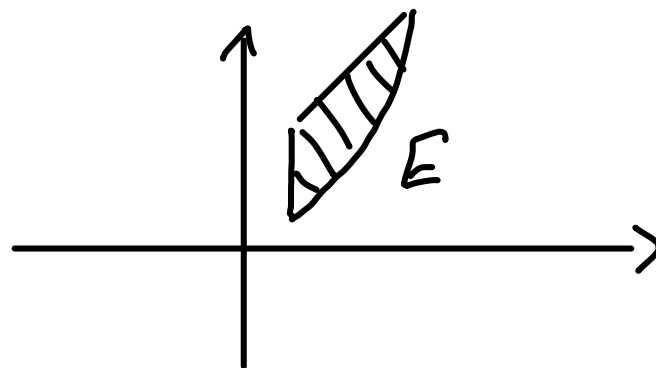
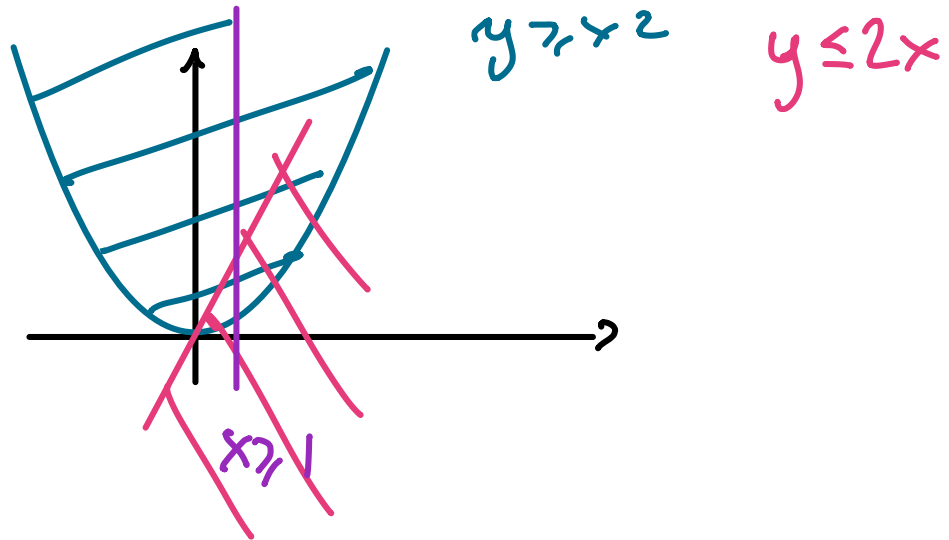
$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x xy dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 dx$$

$$= \frac{1}{8}$$

Noter que $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}$ est également x -simple avec $f(y) = y$, $g(y) = 1$.

(iii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underline{x^2 \leq y \leq 2x}, x \geq 1\}$ ↗ a l'air y -simple!

$$f(x, y) = \frac{2}{x}$$



$$x^2 \leq y \leq 2x, \quad x \in [1, ?]$$

$$\hookrightarrow x^2 \leq 2x \Rightarrow x(x-2) \leq 0 \Rightarrow x \in [0, 2]$$

$$\Rightarrow x \in [1, 2]$$

$$([1, 2] = \{x : x \geq 1 \text{ \& } 0 \leq x \leq 2\})$$

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \int_1^2 \int_{x^2}^{2x} \frac{2}{x} dy dx = \int_1^2 \frac{2(2x - x^2)}{x} dx = \int_1^2 4 - 2x dx \\ &= [4x - x^2]_1^2 = 4. \end{aligned}$$

Exemple 7.4 Permuter des intégrales pour les ensembles simples

(i) Calculons
$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dy dx$$

$$\int x^{37} dx = \frac{1}{38} x^{38}$$

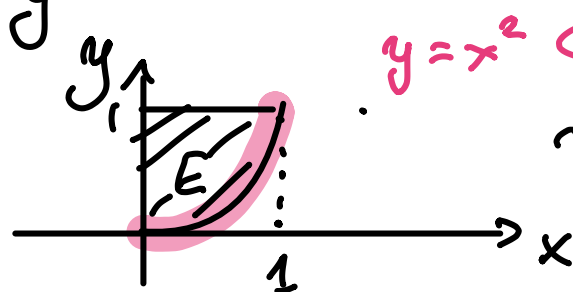
$$\int \frac{1}{1+y^{20}} dy = ???$$

→ problème : on doit commencer par l'intégrale en y :-/

→ Solution recevoir cette intégrale sur un ensemble y -simple en une intégrale sur un ensemble x -simple.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \dots dy dx \Rightarrow I = \iint_E \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dx dy \quad \text{avec } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$x \in [0,1], \quad x^2 \leq y \leq 1\}$$



$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

~

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], 0 \leq x \leq \sqrt{y}\} \quad (\text{observé graphiquement})$$

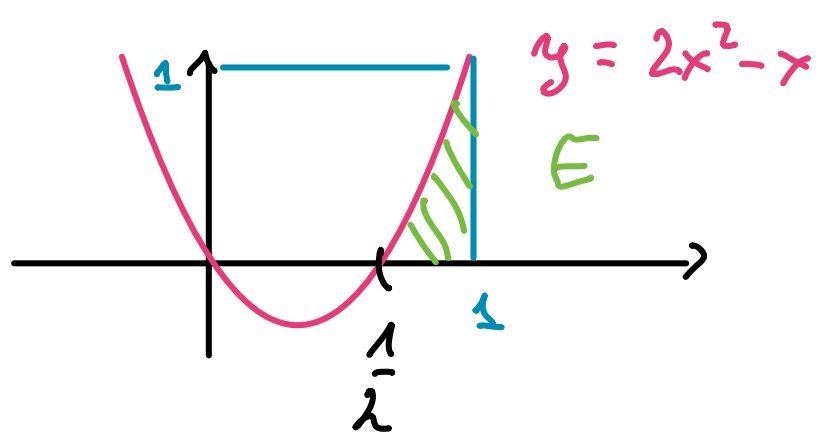
⚠ erreur possible : $0 \leq x \leq \sqrt{y}$ ou $\sqrt{y} \leq x \leq 1$?

$$\Rightarrow \underline{I} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^{37}}{1+y^{20}} dx dy = \frac{1}{38} \int_0^1 \frac{y^{19}}{1+y^{20}} dy = \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{20} [\log(1+y^{20})]_0^1$$

$$= \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{20} \cdot \log(2)$$

(ii) Calculer $\underline{I} = \int_{1/2}^1 \int_0^{2x^2-x} (8x-2) \cos(2y-y^3) dy dx$

$$= \int_E (8x-2) \cos(2y-y^3) dx dy \quad \text{avec } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x^2-x\}$$



$$y = 2x^2 - x \Leftrightarrow 2x^2 - x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8y}}{4}$$

Ver que $x \geq \frac{1}{2}$, " $\pm$ " = "+"

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y}$$

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y}$$

$$\Rightarrow E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y} \leq x \leq 1\}$$

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y}}^1 (8x - 2) \cos(2y - y^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 \cos(2y - y^2) \left[4x^2 - 2x \right]_{x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y}}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \cos(2y - y^2) \left(4 - 2 - 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1+8y} \right) \right) dy$$

$$= \int_0^1 \cos(2y - y^2) \left(2 - \frac{1}{4} (1 + 2\sqrt{1+8y} + 1 + 8y) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+8y} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \cos(2y - y^2) \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1+8y} - 2y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+8y} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \cos(2y - y^2) (2 - 2y) dy$$

$$= \left[\sin(2y - y^2) \right]_{y=0}^{y=1} = \sin(1).$$

Proposition 7.5 Propriétés algébriques de $\iint$

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un fermé borné, $f, g \in C^0(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 $E_1, E_2 \subseteq E$ tq $\text{int}(E_1) \cap \text{int}(E_2) = \emptyset$.

Alors,

$$(i) \quad \iint_E \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) dx dy = \alpha \iint_E f(x, y) dx dy + \beta \iint_E g(x, y) dx dy$$

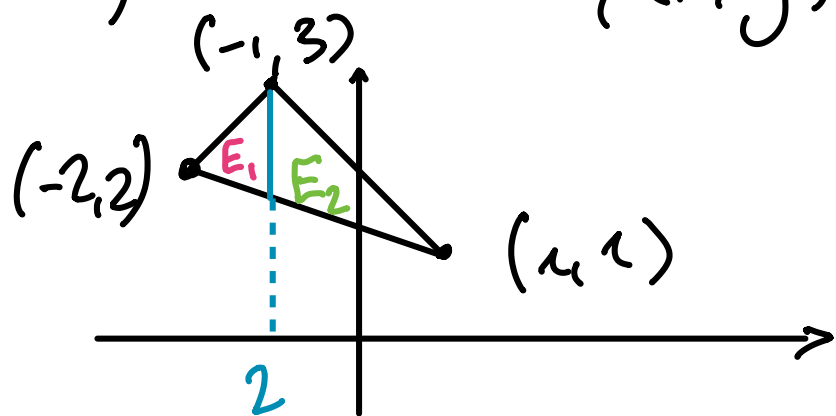
$$(ii) \quad \iint_{E_1 \cup E_2} f(x, y) dx dy = \iint_{E_1} f(x, y) dx dy + \iint_{E_2} f(x, y) dx dy$$

$$(iii) \quad \text{Si } f \leq g, \quad \iint_E f(x, y) dx dy \leq \iint_E g(x, y) dx dy$$

$$(iv) \quad \text{Si } f \geq 0, \quad \iint_{E_1} f(x, y) dx dy \leq \iint_E f(x, y) dx dy$$

Exemple 7.6 : Découpage.

(i) Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}, y \leq -x + 2, y \leq x + 4\}$



$$f(x, y) = 3x$$

$$E_1 = \{(x, y) : x \in [-2, -1], -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \leq y \leq x + 4\}$$

$$E_2 = \{(x, y) : x \in [-1, 1], -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \leq y \leq -x + 2\}$$

$$\begin{aligned} \iint_{E_1} f(x, y) dx dy &= \int_{-2}^{-1} \int_{-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}^{x+4} 3x dy dx = \int_{-2}^{-1} 4x^2 + 8x dx \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\iint_{E_2} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}^{-x+2} 3x dy dx = \int_{-1}^1 -2x^2 + 2x dx = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \iint_E f(x,y) dx dy = \iint_{E_1} f(x,y) dx dy + \iint_{E_2} f(x,y) dx dy$$

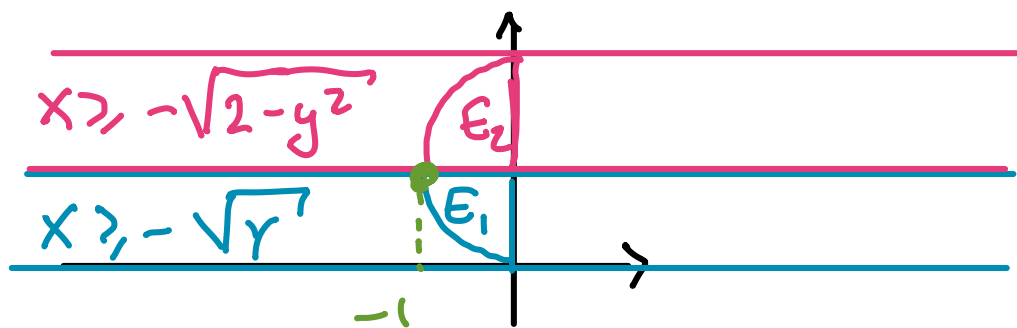
$$= -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = -4$$

$$(ii) \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y) dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y) dx dy$$

$$= \iint_{E_1} f(x,y) dx dy + \iint_{E_2} f(x,y) dx dy \quad \text{avec}$$

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq 0\}$$

$$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq \sqrt{2}, -\sqrt{2-y^2} \leq x \leq 0\}$$



$$y = \sqrt{2}$$

$$y = 1$$

$$y = 0$$

$$x = -\sqrt{2-y^2}$$

$$x = -\sqrt{y} \Rightarrow x^2 = y$$

$$\Rightarrow y^2 = 2 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2-x^2} \quad (y \geq 0)$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 - y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 2 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2-x^2} \quad (y \geq 0)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2-x^2} \quad (y \geq 0)$$

$$E_1 \cup E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_{E_1} f(x, y) dx dy + \iint_{E_2} f(x, y) dx dy &= \iint_E f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dx dy - \end{aligned}$$

Definition 7.2 : Aire

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé borné. L'aire de E

est définie par $\text{Aire}(E) = \iint_E 1 dx dy$

Théorème 7.8 Formule de changement de variables.

Soit $E, F \subseteq \mathbb{R}^2$ deux ensembles fermés bornés,

$\varphi : E \rightarrow F : (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ une fonction de classe C^1 bijective tq $\forall (u, v) \in E$, $\det \nabla \varphi(u, v) \neq 0$.

Alors,

$$\iint_F f(x, y) dx dy = \iint_E f(\varphi(u, v)) \cdot |\det \nabla \varphi(u, v)| du dv.$$

Définition 7.9 Jacobien

Soit φ comme ci-dessus. Le jacobien de φ noté

$\text{Jac } \varphi(u, v)$ est défini par $\text{Jac } \varphi(u, v) = \det \nabla \varphi(u, v)$.

Remarque 7.10 : Pourquoi la valeur absolue du jacobien ?

Rappel d'analyse I :

$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ bijective, $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1$.

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Cas 1 : φ est strictement croissante.

$$a = \varphi(\alpha) < \varphi(\beta) = b \quad \text{et} \quad \varphi'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) |\varphi'(x)| dx.$$

Cas 2 : φ strictement décroissante.

$$a = \varphi(\beta) > \varphi(\alpha) = b \text{ et } \varphi'(x) \leq 0.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(x) dx = - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \underbrace{(-\varphi'(x))}_{=|\varphi'(x)|} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

$\Rightarrow$ la valeur absolue prend en compte un éventuel

changement d'orientation!

§ 7.2 Intégrales doubles en coordonnées polaires.

Exemple 7.11 : Jacobien des coordonnées

Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

↳ peut être remplacé par
n'importe quel intervalle
de longueur 2π

$$\text{Exemple 4.35(i)} \rightarrow \nabla \varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Jac } \varphi(r, \theta) = \det \nabla \varphi(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Example 7.12

(i) Soit $E = \bar{B}((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\text{et } f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$$

3 options :

$$E \text{ est } y\text{-simple} : E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$E \text{ est } x\text{-simple} : E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1], -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

$$\text{coord. polaires} : E = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]\}$$

$$(x,y) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1 \stackrel{r \geq 0}{\iff} r \leq 1$$

Les calculs de primitives dans le casin x-simple ou y-simple sont pas cools. $\left(\int x^2 \sqrt{1-x^2}, \int (1-x^2)^{3/2} \dots \right)$

Coordonnées polaires:

$$\iint_E f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\theta dr$$

Jacobian!

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 + 2r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta dr$$

$$= \int_0^1 r^3 \left[\theta + \sin^2 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2} \pi$$

(ii) avec des contraintes sur θ

Soit $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \geq |y| \}$

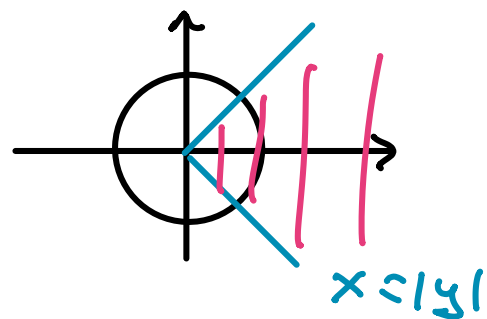
$\hookrightarrow$ polaires

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad \text{Jac} = r$$

$$x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow r^2 \leq 9 \xrightarrow{r \geq 0} r \in [0, 3]$$

$$x \geq |y| \Leftrightarrow r \cos \theta \geq r |\sin \theta| \Leftrightarrow \cos \theta \geq |\sin \theta|$$

pas de r , restriction
sur θ uniquement.



$$\Rightarrow \theta \in [-\pi/4, \pi/4]$$

eh! $\theta \in [0, 2\pi]$??

$$\Rightarrow \theta \in [0, \pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$$

De base $\theta \in$ un intervalle de longueur 2π . Si on était parti avec $\theta \in [-\pi, \pi]$, on aurait eu $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$

$$\Rightarrow \int_E f(x, y) dx dy = \int_0^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

(iii) Ensemble simple dans $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$,

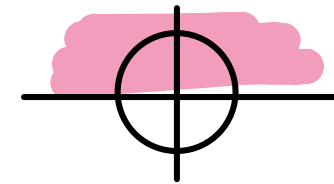
$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \geq x^2 + y^2 \right\}$$

impossible à classer

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta), r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \quad \text{Jac} = r.$$

$$x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow r \in [0, 2]$$

$$y \geq 0 \Leftrightarrow r \sin \theta \geq 0 \Leftrightarrow \sin \theta \geq 0$$

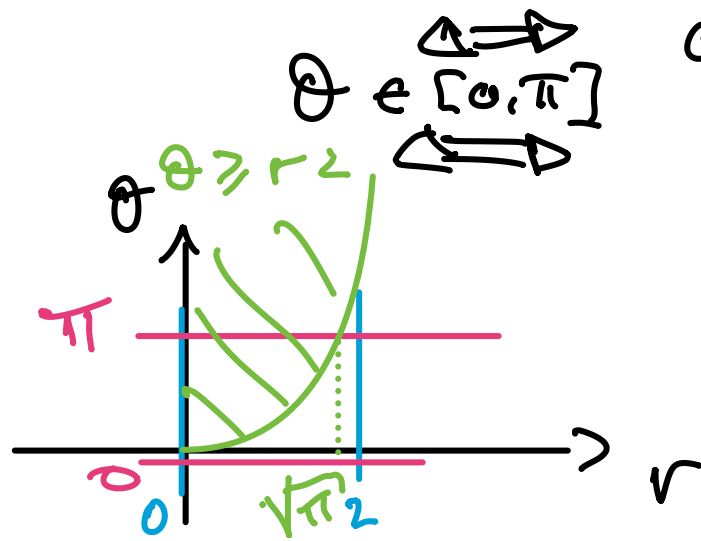


$$\Leftrightarrow \theta \in [0, \pi]$$

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{r \cos \theta}{r}\right) \geq r^2$$

$$\arccos(\cos \theta) \geq r^2$$

$$\theta \geq r^2$$



$$\text{Vu que } \sqrt{\pi} \leq 2 \quad (\pi \leq 4),$$

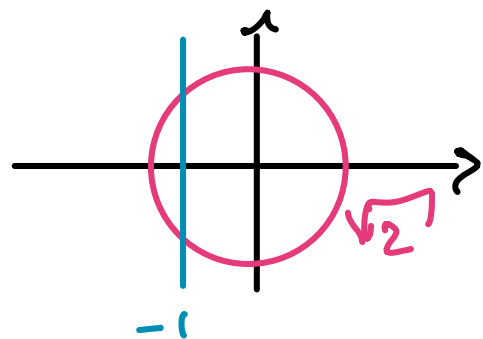
$$E = \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [\pi/2, \pi] \} \quad (\theta\text{-simple})$$

$$= \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : \theta \in [0, \pi], r \in [0, \sqrt{2}] \} \quad (r\text{-simple})$$

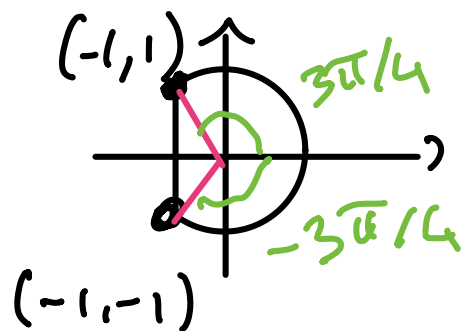
$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^{\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr. \end{aligned}$$

(iv) Avec découpage.

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq -1 \}$$

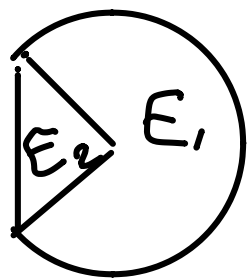


→



$$\begin{aligned} (-1)^2 + y^2 &\leq 2 \Leftrightarrow y = \pm 1 \\ \text{pour } \theta \in [3\pi/4, 5\pi/4], \\ x^2 + y^2 &\leq 2 \Rightarrow x \geq -1 \end{aligned}$$

Pair $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, $x \geq -1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2$



$$E_1 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$$

$$E_2 = \{(x, y) : x \in [-1, 0], x \leq y \leq -x\}$$

$$= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}], r \in [0, \frac{-1}{\cos \theta}]\}$$

$x \geq -1$
 $\Leftrightarrow r \cos \theta \geq -1$

$\Leftrightarrow r \leq \frac{-1}{\cos \theta}$
 $\cos \theta \leq 0$

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr \\ &+ \int_{-1}^0 \int_x^{-x} f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

→ risque de faire des problèmes

§ 7.3 Intégrales triples en coordonnées cartésiennes
 À la place de $\iint$, c'est $\iiint$

Exemples 5.13

(i) $E = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, $f(x, y, z) = xyz$

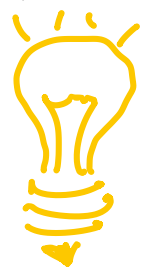
$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_r^s xyz \, dz dy dx$$

$$= \int_a^b \int_c^d xy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=r}^{z=s} = \frac{1}{2} (s^2 - r^2) \int_a^b \int_c^d xy \, dy dx$$

$$= \dots = \frac{1}{8} (b^2 - a^2) (d^2 - c^2) (s^2 - r^2).$$

(ii) Soit $a > 0$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq a\}$,

$$f(x, y, z) = x^2$$



Comme dans $\mathbb{R}^2$, écrire les bornes pour une variable en fonction des deux autres.

$$\textcircled{z} \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq a \Rightarrow \underline{0 \leq z \leq a - x - y}$$

$$\hookrightarrow 0 \leq a - x - y$$

$$\textcircled{y} \quad y \geq 0, \quad 0 \leq a - x - y \Rightarrow \underline{0 \leq y \leq a - x}$$

$$\hookrightarrow 0 \leq a - x$$

$$\textcircled{x} \quad x \geq 0, \quad 0 \leq a - x \Rightarrow 0 \leq x \leq a.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} x^2 \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_0^a \int_0^{a-x} x^2 \left[z \right]_{z=0}^{z=a-x-y} dy \, dx \\
&= \int_0^a \int_0^{a-x} x^2 (a-x-y) dy \, dx = \int_0^a \int_0^{a-x} ax^2 - x^3 - x^2 y \, dy \, dx \\
&= \int_0^a \left[ax^2 y - x^3 y - \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=0}^{y=a-x} dx \\
&= \int_0^a ax^2 - ax^3 - ax^3 + x^4 - \frac{1}{2} x^2 (a^2 - 2ax + x^2) dx \\
&= \int_0^a x^4 - 2ax^3 + a^2 x^2 - \frac{1}{2} a^2 x^2 + ax^3 - \frac{1}{2} x^4 dx \\
&= \int_0^a \frac{1}{2} x^4 - ax^3 + \frac{1}{2} a^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} ax^4 + \frac{1}{6} a^2 x^3 \right]_0^a = \frac{a^3}{60}
\end{aligned}$$

$$(ii) E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2 - 2x + 1, x - y - z \geq 1, x - y + z \geq 1 \}$$

Choose : $\alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)$ or $\alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z)$ or $\alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z)$

①
②
③

① z : $x - y - z \geq 1, x - y + z \geq 1 \Rightarrow \underline{1 - x + y \leq z \leq x - y - 1}$

$\hookrightarrow 1 - x + y \leq x - y - 1$

Reshe à trouver $y \geq x^2 - 2x + 1, 1 - x + y \leq x - y - 1$ ($\Leftrightarrow x - y - 1 \geq 0$)

(choose : $f(x) \leq y \leq g(x)$ or $f(y) \leq x \leq g(y)$)

1.1

1.2

1.1 y : $y \geq x^2 - 2x + 1, x - y - 1 \geq 0 \Rightarrow \underline{x^2 - 2x + 1 \leq y \leq x - 1}$

$\hookrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x - 1$

Reshe à trouver $x^2 - 2x + 1 \leq x - 1$

$$x^2 - 2x + 1 \leq x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1, 2]$$

Conclusion:
$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_1^2 \int_{x^2-2x+1}^{x-1} \int_{1-x+y}^{x-y-1} f(x, y, z) dz dy dx$$

1.2 X: $y \geq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - y \leq 0$

$$x^2 - 2x + 1 - y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(1-y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{y} \leq x \leq 1 + \sqrt{y}$$

$$\text{et } x - y - 1 \geq 0$$

Δ si $y < 0$,

$$x^2 - 2x + 1 - y > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - y \leq 0$$

impossible

$$\Rightarrow y \geq 0$$

(Rem: $a \leq c$ & $b \leq c \Leftrightarrow \max(a, b) \leq c$)

$$\max(1 - \sqrt{y}, 1 + y) \leq x \leq 1 + \sqrt{y}$$

Or, on que $y \geq 0$, $1+y \geq 1 \geq 1-\sqrt{y}$

$$\Rightarrow \max(1+y, 1-\sqrt{y}) = 1+y$$

$$\Rightarrow \underline{1+y \leq x \leq 1+\sqrt{y}}$$

$$\hookrightarrow 1+y \leq 1+\sqrt{y}$$

Reste à traiter: $y \geq 0$, $1+y \leq 1+\sqrt{y}$ ($\Leftrightarrow y \leq 1$)

$$y \in [0, 1]$$

$$\text{Conclusion: } \iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_{1+y}^{1+\sqrt{y}} \int_{1-x+y}^{x-y-1} f(x, y, z) dz dx dy$$

$$\textcircled{2} y: y \geq x^2 - 2x + 1$$

$$y \leq x - z - 1$$

$$y \leq x + z - 1$$

$$\left(\text{Rem: } a \leq b, a \leq c \Leftrightarrow a \leq \min(b, c) \right)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq y \leq \min(x - z - 1, x + z - 1)$$

Or, si $z \geq 0$, $x+z-1 \geq x-z-1$

si $z \leq 0$, $x+z-1 \leq x-z-1$

$\Rightarrow \min(x-z-1, x+z-1) = \begin{cases} x+z-1 & \text{si } z \leq 0 \\ x-z-1 & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ découpage sur z !

Reste à traiter:

$\rightarrow$ si $z \leq 0$, $x^2 - 2x + 1 \leq x + z - 1$

si $z \geq 0$, $x^2 - 2x + 1 \leq x - z - 1$

$g(x) \leq z \leq f(x)$ ou $h(z) \leq x \leq \delta(z)$

2.1

2.2

2.1 | z : si $z \leq 0$:

$x^2 - 2x + 1 \leq x + z - 1$

$z \leq 0$

$\Rightarrow$

$x^2 - 3x + 2 \leq z \leq 0$

$\hookrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$

reste à traiter

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$$

Si $z \geq 0$

$$x^2 - 2x + 1 \leq x - z - 1$$

$$z \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq z \leq -x^2 + 3x - 2$$

$$\hookrightarrow 0 \leq -x^2 + 3x - 2$$

reste à traiter

$$-x^2 + 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$$

Conclusion:

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_1^2 \int_{x^2-3x+2}^0 \int_{x^2-2x+1}^{x+z-1} f(x, y, z) dy dz dx + \int_0^{x^2+3x-2} \int_{x^2-2x+1}^{x-z-1} f(x, y, z) dy dz dx$$

$$\boxed{2.2} \quad x : \quad \{z \leq 0\}$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq x + 2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - z \leq 0$$

$$\left(x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2 - z)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 4z}}{2} \right. \quad \triangle$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{1 + 4z}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{1 + 4z}}{2} \quad z \geq -\frac{1}{4}$$

reste à trouver

$$z \leq 0 \quad z \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq z \leq 0$$

$$\{z \geq 0\}$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq x - z - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + z \leq 0 \quad \left(x = \frac{3 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2} \right. \quad \triangle$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{1 - 4z}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{1 - 4z}}{2} \quad z \leq \frac{1}{4}$$

rest à trouver

$$0 \leq z, \quad z \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{4}$$

Conclusion: $\iiint f(x, y, z) dx dy dz =$

$$\int_{-\frac{1}{4}}^0 \int_{\frac{3-\sqrt{1+4z}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{1+4z}}{2}} \int_{x^2-2x+1}^{x+z-1} f(x, y, z) dy dx dz + \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{3-\sqrt{1-4z}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{1-4z}}{2}} \int_{x^2-2x+1}^{x-z-1} f(x, y, z) dy dx dz$$

③ $x: y \geq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0$
 $\left(\begin{array}{l} x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-y)}}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{y} \end{array} \right) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{y} \leq x \leq 1 + \sqrt{y} \quad \triangle! \quad y \geq 0$

$$x - y - z \geq 1 \iff x \geq 1 + y + z$$

$$x - y + z \geq 1 \iff x \geq 1 + y - z$$

$$\Rightarrow \max(1 - \sqrt{y}, 1 + y + z, 1 + y - z) \leq x \leq 1 + \sqrt{y} \quad y \geq 0, z \leq 0$$

$$\text{si } z \leq 0, \quad 1 + y + z \leq 1 + y - z \quad \& \quad 1 - \sqrt{y} \leq 1 \leq 1 + y - z$$

$$\Rightarrow \max(-) = 1 + y - z \quad y, z \geq 0$$

$$\text{si } z \geq 0, \quad 1 + y - z \leq 1 + y + z \quad \& \quad 1 - \sqrt{y} \leq 1 \leq 1 + y + z$$

$$\Rightarrow \text{cloud } z \leq 0$$

$$\underline{1 + y - z \leq x \leq 1 + \sqrt{y}}$$

$$\hookrightarrow 1 + y - z \leq 1 + \sqrt{y}$$

$$\text{cloud } z \geq 0$$

$$\underline{1 + y + z \leq x \leq 1 + \sqrt{y}}$$

$$\hookrightarrow 1 + y + z \leq 1 + \sqrt{y}$$

Resk a' traiber

$$y \geq 0$$

$$\text{si } z \leq 0, \quad 1+y-z \leq 1+\sqrt{y}$$

$$\text{si } z \geq 0, \quad 1+y+z \leq 1+\sqrt{y}$$

$$\mu(y) \leq z \leq \delta(y) \quad \text{ou} \quad \mu(z) \leq y \leq \delta(z)$$

3.1

z :

$$z \leq 0$$

$$z \leq 0$$

$$1+y-z \leq 1+\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow y - \sqrt{y} \leq z \leq 0$$

$$\hookrightarrow y - \sqrt{y} \leq 0$$

$$z \geq 0$$

$$z \geq 0$$

$$1+y+z \leq 1+\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{y} - y$$

$$\hookrightarrow \sqrt{y} - y \geq 0$$

Reste à trouver

$$\begin{aligned} y \geq 0, \quad & \text{si } z \leq 0 & y - \sqrt{y} \leq 0 & \Leftrightarrow y \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow y \leq 1 \\ & \text{si } z \geq 0 & \sqrt{y} - y \geq 0 & \Leftrightarrow y \leq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

Conclusion: $\iiint f(x, y, z) dx dy dz$

$$= \int_0^1 \int_{y-\sqrt{y}}^0 \int_{1+y-z}^{1+\sqrt{y}} f(x, y, z) dz dx + \int_0^{\sqrt{y}-y} \int_{1+y+z}^{1+\sqrt{y}} f(x, y, z) dz dx dy$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3.2} \quad y: y \geq 0 \quad & \text{si } z \leq 0 & 1+y-z \leq 1+\sqrt{y} \\ & \text{si } z \geq 0 & 1+y+z \leq 1+\sqrt{y} \end{aligned}$$

$$z \leq 0$$

$$1+y-z \leq 1+\sqrt{y} \Leftrightarrow y-z \leq \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2yz + z^2 \leq y$$

$$\Delta y-z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - (1+2z)y + z^2$$

$$y = \frac{1+z \pm \sqrt{(1+2z)^2 - 4z^2}}{2}$$

$$= 1+2z \pm \sqrt{1+4z}$$

$$\Delta z \geq -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+2z - \sqrt{1+4z}}{2} \leq y \leq \frac{1+2z + \sqrt{1+4z}}{2}$$

$$\hookrightarrow \frac{1+2z - \sqrt{1+4z}}{2} \leq \frac{1+2z + \sqrt{1+4z}}{2}$$

toujours vérifié!

$z \geq 0$

$$1+y+z \leq 1+\sqrt{y} \Leftrightarrow y+z \leq \sqrt{y}$$

$$\triangle \quad \Leftrightarrow y^2 + 2yz + z^2 \leq y$$

$$y+z \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + (2z-1)y + z^2$$

$$\left(y = \frac{1-2z \pm \sqrt{(2z-1)^2 - 4z^2}}{2} \right. \quad \triangle z \leq \frac{1}{4}$$
$$\left. = \frac{1-2z \pm \sqrt{1-4z}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2z - \sqrt{1-4z}}{2} \leq y \leq \frac{1-2z + \sqrt{1-4z}}{2}$$

$\hookrightarrow$ toujours vérifié

Reste à traiter:

$$\text{si } z \leq 0, \quad z \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{si } z \geq 0 \quad z \leq \frac{1}{4}$$

Conclusion: $\iiint f(x, y, z) dx dy dz =$

$$\int_{-\frac{1}{4}}^0 \int_{\frac{1+2z-\sqrt{1+4z}}{2}}^{\frac{1+2z+\sqrt{1+4z}}{2}} \int_{1+y-z}^{1+\sqrt{y}} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2}}^{\frac{1-2z+\sqrt{1-4z}}{2}} \int_{1+y+z}^{1+\sqrt{y}} f(x, y, z) dx dy dz$$

Voir manuscrit
p. 78 - 92

Définition 7.14 : Masse, volume, barycentre

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^3$ fermé, borné.

(i) Si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ (typiquement $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ dans le cas d'applications physiques) est la densité de masse du solide E , la masse totale du solide est

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

(ii) Le volume de E , noté $\text{Vol}(E)$ est défini par

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E 1 dx dy dz$$

(iii) Si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est la densité de masse du solide E ,

le barycentre ou centre de masse de E est le point (x_c, y_c, z_c) où

$$x_c = \frac{\iiint_E x f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}$$

← masse totale

$$y_c = \frac{\iiint_E y f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}$$

$$z_c = \frac{\iiint_E z f(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz}$$

En particulier, si $f = \text{cte}$,

$$x_c = \frac{1}{\text{Vol}(E)} \iiint_E x dx dy dz$$

$$y_c = \frac{1}{\text{Vol}(E)} \iiint_E y dx dy dz$$

$$z_c = \frac{1}{\text{Vol}(E)} \iiint_E z dx dy dz$$

Exemple 7.15

Soit $E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z \leq 8 \}$
densité de masse $\equiv 1$

Calculons le barycentre de E :

$$z: z \geq 0, 4x + 2y + z \leq 8 \rightarrow \underline{0 \leq z \leq 8 - 4x - 2y} \\ \hookrightarrow 0 \leq 8 - 4x - 2y$$

$$y: y \geq 0, 0 \leq 8 - 4x - 2y \rightarrow \underline{0 \leq y \leq 4 - 2x} \\ \hookrightarrow 0 \leq 4 - 2x$$

$$x: x \geq 0, 0 \leq 4 - 2x \rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{Vol}(E) = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (8-4x-2y) \, dy \, dx = \dots = \frac{32}{3}$$

$$\iiint_E x \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} x \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (8x - 4x^2 - 2xy) \, dy \, dx = \dots = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow x_c = \frac{16/3}{32/3} = \frac{1}{2}$$

$$\iiint_E y \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} y \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} (8y - 4xy - 2y^2) \, dy \, dx = \dots = \frac{32}{3} \quad \Rightarrow y_c = \frac{32/3}{32/3} = 1$$

$$\iiint_E z \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-4x-2y} z \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{4-2x} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=8-4x-2y} dy \, dx = \dots = \frac{64}{3} \quad \Rightarrow z_c = \frac{64/3}{32/3} = 2$$

$$\Rightarrow \text{barycentre} = (x_c, y_c, z_c) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$$

Proposition 7.16 Propriétés algébriques de $\iiint$

Soient $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un fermé, borné, $f, g \in C^0(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 $E_1, E_2 \subseteq E$ deux fermés bornés tq $\text{int}(E_1) \cap \text{int}(E_2) = \emptyset$

Avec,

$$(i) \quad \iiint_E \alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z) \, dx dy dz$$

$$= \alpha \iiint_E f(x, y, z) \, dx dy dz + \beta \iiint_E g(x, y, z) \, dx dy dz$$

$$(ii) \quad \iiint_{E_1 \cup E_2} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{E_1} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

$$+ \iiint_{E_2} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

$$(iii) \text{ si } f \leq g, \quad \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_E g(x, y, z) dx dy dz$$

$$(iv) \text{ si } f \geq 0, \quad \iiint_{E_1} f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

Théorème 7.17 Formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^3$:

Soient $E, F \subset \mathbb{R}^3$ deux fermés bornés, $\varphi : E \rightarrow F : (u, v, w) \mapsto \varphi(u, v, w)$, bijective de classe C^1 tq $\forall (u, v, w) \in E$,
 $\det \nabla \varphi(u, v, w) \neq 0$. Alors,

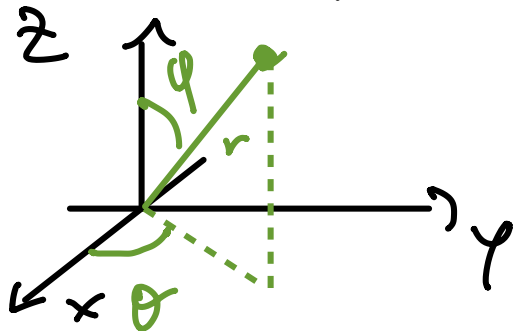
$$\iiint_F f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f(\varphi(u, v, w)) \underbrace{|\det \nabla \varphi(u, v, w)|}_{:= \text{Jac } \varphi(u, v, w)}$$

§ 7.4 Changement de coordonnées sphériques & cylindriques

Exemple 7.18 Coordonnées sphériques.

Soit $G : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par
peut être remplacé ↪ $\hookrightarrow$ ne peut pas être remplacé
par n'importe quel
intervalle de longueur 2π

$$G(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$



Exemple 4.35 (iii)

$$\nabla G(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Jac } G(r, \theta, \phi) = \det \nabla G(r, \theta, \phi) = -r^2 \sin \phi$$

$$(\text{Rem: } \phi \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \phi \geq 0 \Rightarrow |\text{Jac } G(r, \theta, \phi)| = r^2 \sin \phi)$$

Example 7.19

→ coordonnées sphériques

$$(i) E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \quad f(x, y, z) = 3z^2$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi],$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow r^2 \leq 4 \stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} r \in [0, 2]. \quad \varphi \in [0, \pi].$$

$$\Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3r^2 \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^4 \underbrace{\left[-\cos^3 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}}_{=2} dr = 4\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^2 = \frac{2^7}{5} \pi = \frac{128}{5} \pi$$

$$(ii) E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} r \in [0, 1]$$

$$x \geq 0 \quad \stackrel{r \geq 0, \sin \varphi \geq 0}{\Leftrightarrow} r \cos \theta \sin \varphi \geq 0 \quad \Leftrightarrow \cos \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y \geq 0 \quad \stackrel{r \geq 0, \sin \varphi \geq 0}{\Leftrightarrow} r \sin \theta \sin \varphi \geq 0 \quad \Leftrightarrow \sin \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi]$$

$$z \geq 0 \quad \Leftrightarrow r \cos \varphi \geq 0 \quad \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \stackrel{\varphi \in [0, \pi]}{=} \varphi \in [0, \pi/2]$$

$$\Rightarrow r \in [0, 1], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap [0, \pi] = [0, \pi/2]$$

$$\varphi \in [0, \pi/2]$$

$$\Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(-) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$(iii) \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \quad r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi].$$

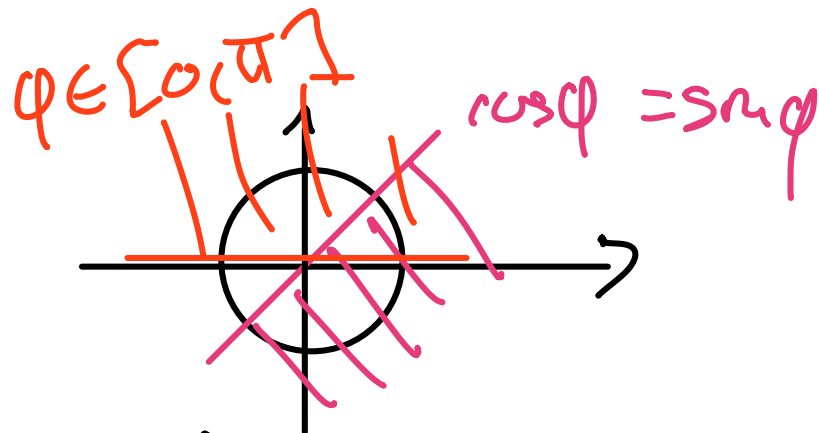
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \quad \stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad r \in [0, 3]$$

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad r \cos \varphi \geq \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi} \quad \Leftrightarrow \quad r \cos \varphi \geq r \sin \varphi$$

$$\uparrow \sin \varphi \geq 0 \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$\stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad \cos \varphi \geq \sin \varphi$$

$$\varphi \in [0, \pi] \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in [0, \pi/4]$$



$$\Rightarrow \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} f(-) r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr$$