(Work in progress)
Analyse II

Pour sections CGC et SV de l'EPFL

David Strütt

Version pre-alpha du 31 janvier 2025

Table des matières

Préface

Le but de ce polycopié est de servir de base et de référence pour le cours d'analyse II pour CGC et SV à l'EPFL. Les consoeurs et confrères qui souhaiteraient l'utiliser sont les bienvenus.
Notez cependant qu'il ne présente aucune garantie de couvrir toute la matière présentée dans un cours d'analyse II. Il vaut mieux toujours se référer aux ressources données par l'enseignant · e du cours.

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

1.1 Introduction et motivation

En sciences et en ingénierie, une des choses qu'on aime bien être capable de faire c'est des prédictions précises sur un phénomène. Par exemple, en météorologie, on aimerait faire des prédictions sur le temps qu'il fera sur la semaine, en climatologie, on aimerait faire des prédictions sur le climat pour les générations futures, en balistique, on aimerait prédire où notre projectile va atterrir, en statique, on aimerait prédire combien de temps une structure va tenir, en médecine, on aimerait prédire les effets d'un médicament sur les patients, etc... Comment donc faire des prédictions ?
Une idée serait de consulter un oracle. Malheureusement, la diviniation n'est pas une science exacte (même Albus Dumbledore, directeur de l'école de Sorcellerie Poudlard hésite à arrêter les cours de divination [*].)
Une prochaine idée est de faire des tests. Selon l'idée qu'une situation similaire donne des résultats similaires, on peut créer des situations sur lesquelles on souhaiterait faire des prédictions, observer ce qu'il se passe, puis réutiliser ces observation comme prédictions.
Cette idée présente deux problèmes :
Le premier est que certains tests peuvent avoir des conséquences désastreuses. Par exemple en balistique, si on veut faire des prédictions sur la trajectoire d'une fusée et que lors du test, la fusée s'écrase sur la maison d'un voisin, on va avoir des problèmes.
Le deuxième est que certains phénomènes ne peuvent pas être testés. Certains phénomènes se produisent à des températures telles qu'il est impossible de les mesurer sans détruire les instruments de mesure.
Une troisième idée est d'utiliser un modèle.
Un modèle consiste en une équation mathématique qui proviennent d'une analyse souvent physique dont les différents termes représentent les concepts et paramètres pertinents au phénomène. Par exemple, si $x(t)$ est la position d'un objet de masse m au temps t soumis à une force $F(t)$ au temps t, la deuxième loi de Newton est un modèle qui nous dit que

$$F(t) = m \cdot x''(t).$$

Néanmoins ces modèles décrivent rarement comment les choses *sont/seront* mais plutôt comment les choses *évoluent*. Ceci se transcrit mathématiquement qu'à la place de $x(t)$, c'est les dérivées de x qui apparaissent dans l'équation.
Dans le cas ci-dessus, $F(t) = m \cdot x''(t)$, si $F(t)$ est connu, on a déjà des outils pour trouver x : Il suffit de prendre deux fois la primitive de $\frac{1}{m}F(t)$. Dans un cas plus complexe, si par

∗. "[...] it was against my inclination to allow the subject of Divination to continue at all.", *Harry Potter and the order of the Pheonix*, chapter 37 : The Lost Prophecy exemple, F est la force de gravité, celle-ci dépend de la position de l'objet, c'est-à-dire, on a comme modèle

$$F(x(t)) = m \cdot x''(t)$$

et on a là une équation pour laquelle on n'a pas encore les outils pour la résoudre.

Définition 1.1 (Équation différentielle ordinaire)**.**
Une *équation différentielle (ordinaire)* (EDO) est la donnée d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une fonction

$$\begin{aligned} E\colon \mathbb{R}^{n+2} &\to \mathbb{R} \\ (x, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_n) &\mapsto E(x, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_n). \end{aligned}$$

Une *solution* de l'EDO est la donnée d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction $y \in C^n(I)$ telle que pour tout $x \in I$,

$$E(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

De plus, on dit que

(*i*) l'EDO est d'*ordre* n si E est une fonction non-constante en ξ_n (i.e. E dépend de ξ_n).

(*ii*) l'EDO est *autonome* si E est une fonction constante en x (i.e. E ne dépend pas de x).

Remarque 1.2. (*i*) Généralement, on donne une EDO sous la forme $E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ où on identifie $y^{(k)} \leftrightarrow \xi_k$. Comme pour l'exemple de la deuxième loi de Newton, on donne l'équation sous la forme

$$my'' - F(y) = 0,$$

à la place de la donner sous la forme

$$m\xi_2 - F(\xi_0) = 0.$$

(*ii*) Le terme "ordinaire" signifie qu'on prend la dérivée toujours par rapport à la même variable. Certaines équations différentielles font intervenir des dérivées par rapport à plus d'une variable. On parle alors d'équation au dérivées partielles qui sont au programme d'analyse III-IV. Dans ce cours, on ne fera que des équations différentielles ordinaires, on se permettra donc de raccourcir en "équation différentielle".

Exemple 1.3 (Donnée d'une EDO)**.** (*i*) $y = 0$. En notation formelle, on a $E(\xi_0) = \xi_0$ n'est pas une EDO car $n = 0 \notin \mathbb{N}^*$.

(*ii*) $y' = 0$. En notation formelle, on a $E(\xi_1) = \xi_1$ est une EDO autonome d'ordre 1.

(*iii*) $\sin(y') = 0$. En notation formelle, on a $E(\xi_1) = \sin(\xi_1)$ est une EDO autonome d'ordre 1.

(*iv*) $\sin(x)y' - \sin(y) = 0$. En notation formelle, on a $E(x, \xi_0, \xi_1) = \sin(x)\xi_1 - \sin(\xi_0)$ est une EDO d'ordre 1.

(*v*) $y''' + y'' + y' + y = \sin(x)$. En notation formelle, on a $E(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_3 + \xi_2 + \xi_1 + \xi_0 - \sin(x)$ est une EDO d'ordre 3.

Exemple 1.4 (Solution d'une EDO)**.** (*i*) $y' = 0$. Alors, pour tout $C \in \mathbb{R}$, $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = C$ est une solution. En effet, on a $y'(x) = 0$.

(*ii*) $y' - e^x = 0$. Alors, pour tout $C \in \mathbb{R}$, $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = e^x + C$ est une solution. En effet, $y'(x) = e^x$ et donc, $y'(x) - e^x = 0$.

(*iii*) Plus généralement, si I est un intervalle ouvert et $f \in C^0(I)$, les solution de $y' - f(x) = 0$ sont données par *intégration directe* : Pour tout $C \in \mathbb{R}$, $y\colon I \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \int f(x)dx + C$$

est une solution.

Remarque 1.5. (*i*) Dans les exemples ci-dessus, on avait plus d'une solution (chaque $C \in \mathbb{R}$ donne une solution différente). C'est généralement le cas que la donnée seule d'une équation différentielle ne donne pas une solution unique.

(*ii*) Dès que $y \in C^n(I)$ est une solution d'une EDO, $E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, alors, pour tout $J \subset I$ intervalle ouvert, la restriction de y à J est également une solution de l'EDO.

Définition 1.6 (Solution maximale, solution générale)**.**
Soit $E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ une EDO.

(*i*) Si I est un intervalle ouvert et $y \in C^n(I)$, on dit que y est une *solution maximale de l'EDO* si elle n'est pas la restriction d'une autre solution. C'est-à-dire, dès que $J \supset I$ est un intervalle ouvert et $\tilde{y} \in C^n(J)$ est une solution de l'EDO telle que pour tout $x \in I$, $y(x) = \tilde{y}(x)$, alors, $I = J$.

(*ii*) La *solution générale de l'EDO* est l'ensemble de toutes les solutions maximales de l'EDO.

Exemple 1.7.
Soit l'EDO $y' + \frac{1}{x^2} = 0$. Par intégration directe, on a que toutes les solutions sont données par $y(x) = \frac{1}{x} + C$. Le domaine de définition de cette famille de fonction est $\mathbb{R}^*$. Vu qu'on ne veut que les solutions sur des intervalles, on décompose $\mathbb{R}^*$ en intervalles : $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Chaque intervalle de cette décomposition nous donne une partie des solutions maximales. La solution générale de l'EDO est donc

$$\left\{ y\colon]-\infty, 0[\to \mathbb{R} \text{ définie par } y(x) = \frac{1}{x} + C \ : \ C \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\cup \left\{ y\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}\text{définie par } y(x) = \frac{1}{x} + C \ : \ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vu la longueur des expressions, on se permettra souvent de décrire la solution générale en donnant la liste de toutes les solutions maximales plutôt que d'utiliser la notation ensembliste :

— $y\colon]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{1}{x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$;
— $y\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{1}{x} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Définition 1.8 (Problème de Cauchy, problème aux valeurs initiales, condition(s) initiale(s))**.**
Un *problème de Cauchy* ou *problème aux valeurs initiales* est la donnée d'une EDO $E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ et de $n-1$ équations $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$, appelées *conditions initiales*, où, $t_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$ sont donnés. On écrit des fois

$$\begin{cases} E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 & \text{(EDO)} \\ y(t_0) = y_0, ..., y^{(n-1)} = y_{n-1}(t_0) & \text{(Conditions initiales)} \end{cases}$$

Une *solution (maximale) d'un problème de Cauchy* est la donnée d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $t_0 \in I$ et $y \in C^n(I)$ une solution (maximale) de l'EDO $E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ qui satisfait les conditions initiales $y(t_0) = y_0, ..., y^{(n-1)} = y_{n-1}(t_0)$.

Exemple 1.9.
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solution générale de l'EDO (on verra dans l'exemple 1.15 (i), page 7 comment la trouver) est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour trouver la solution maximale du problème de Cauchy, on pose

$$1 = y(0) = Ce^0 = C,$$

et donc, $C = 1$ et la solution maximale du problème de Cauchy est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = e^x$.

Remarque 1.10.
Comme on l'a vu dans les exemples, sans la condition initiale, il y a rarement une solution unique. On peut se poser la question de si l'ajout de conditions initiales permet de garantir que la solution est unique. Ça n'est malheureusement pas le cas.
En effet, considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Et, pour tout $C \in \mathbb{R}$, $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -C \\ \dfrac{(x+C)^2}{4} & \text{si } x \geq -C \end{cases}$$

Remarquons que pour tout $x < -C$, $y'(x) = 0$. Ainsi, on a bien $y'(x) = 0 = \sqrt{y(x)}$. Pour $x > -C$, on a $y'(x) = \frac{1}{2}(x+C)$, ainsi, on a bien $y' = \frac{1}{2}(x+C) = \frac{1}{2}|x+C| = \sqrt{\frac{(x+C)^2}{4}} = \sqrt{y(x)}$. Pour finir, en $x = -C$, on peut vérifier en regardant la dérivée à droite et à gauche que $y'(-C) = 0 = \sqrt{y(-C)}$.
Ainsi, pour tout $C < 0$, on a que $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy, et il y a donc une infinité de solution au problème.

1.2 EDOs du premier ordre à variables séparées

Définition 1.11 (EDOs à variables séparées)**.**
Soit $E(x, y, y') = 0$ une EDO d'ordre 1. On dit que l'EDO est à variables séparées si il existe f et g deux fonctions telles que

$$E(x, y, y') = g(x) - f(y)y'.$$

Méthode 1.12 (Equation implicite pour la solution)**.**
Soit $E(x, y, y') = g(x) - f(y)y' = 0$ une EDO d'ordre 1 à variables séparées. Supposons que $f, g \in C^0$. Alors, il existe $F, G \in C^1$ telles que $F' = f$ et $G' = g$. Ainsi, si $y \in C^1$ est une solution de l'EDO,

$$0 = g(x) - f(y(x))y'(x) = G'(x) - (F(y(x)))' = (G(x) - F(y(x)))'.$$

Ainsi, vu que la solution est toujours definie sur un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$G(x) - F(y(x)) = C.$$

On a ainsi gagné une équation qui n'est pas une EDO, qu'on peut résoudre pour trouver y.

Méthode 1.13 (Séparation des variables)**.**
Soit $E(x, y, y') = g(x) - f(y)y' = 0$ une EDO d'ordre 1 à variables séparées. Supposons que $f, g \in C^0$.
En écrivant $y' = \frac{dy}{dx}$, on arrive à

$$g(x) - f(y)y' = 0 \rightsquigarrow g(x) - f(y)\frac{dy}{dx} = 0 \rightsquigarrow g(x)dx = f(y)dy.$$

En amplifiant l'équation par $\displaystyle\int$, et en utilisant que les primitives sont définies à une constante près, on arrive à

$$\int g(x)dx = \int f(y)dy + C$$

On peut ensuite calculer ces deux primitives (on traite y comme une **variable**) et on se retrouve dans exactement la même situation que pour la méthode 1.12 :

$$G(x) = F(y) + C.$$

En résolvant cette équation pour y, on trouve les solutions de l'EDO.

Remarque 1.14.
Les deux méthodes précédentes font exactement la même chose. L'avantage de la méthode 1.12 est que chaque étape est rigoureuse et donc, on arrive à un raisonnement du style : Si y est une solution alors nécessairement $G(x) - F(y(x)) = C$. En résolvant cette équation, on trouve $y(x)$ et on peut ensuite vérifier que y est bien une solution de l'EDO en remplaçant dans l'EDO.
En particulier, vu qu'on s'intéresse à la solution générale, il est important de pouvoir justifier qu'il n'y a pas plus de solutions que ce qu'on a trouvé (ou que notre raisonnement ne nous fait pas rater des solutions).
La méthode 1.13 est tout sauf rigoureuse : $y' = \frac{dy}{dx}$ est une notation et rien ne nous autorise à séparer dy et dx. Ainsi, on est plus dans un raisonnement du style : On fait des trucs, après on trouve y et après, on vérifie que y est une solution. Le problème de ce raisonnement est qu'il ne garantit pas que les trucs qu'on fait donnent toutes les solutions.
Néanmoins, il est plus facile de s'en souvenir et ne demande pas de "voir" la dérivée totale $f(y(x))y'(x) = (F(y(x)))'$. De plus, vu qu'en fait il se passe exactement la même chose dans les deux méthodes, on sait qu'on ne rate pas de solution.

Exemple 1.15. (i) Soit l'EDO $y' = y$. Alors,

$$y' = y \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = y \overset{y \neq 0}{\rightsquigarrow} \frac{dy}{y} = dx \rightsquigarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 1dx + C \rightsquigarrow \log|y| = x + C.$$

Cette dernière équation est $G(x) - F(y) = C$. On doit maintenant la résoudre. Notez que pour arriver jusque là, on a du supposer que $y \neq 0$. On devra à la fin vérifier séparément si $y = 0$ est une solution. On reprend notre équation :

$$y' = y \rightsquigarrow e^{\log|y|} = e^{x+C} \rightsquigarrow |y| = e^C e^x \rightsquigarrow y = \pm e^C e^x.$$

Remarquons que $\pm e^C$ est une constante réelle non nulle. On a donc $y(x) = Ke^x$, avec $K \in \mathbb{R}^*$. Il faut encore traiter le cas $y = 0$ On a $y' = 0$, donc $y' = 0 = y$ et $y = 0$ est aussi une solution de l'EDO mais qu'on ne retrouve pas avec notre méthode. Remarquons de plus que pour $K = 0$, $Ke^x = 0$ et donc, n'importe quelle solution trouvée s'écrit de la forme

$$y(x) = Ke^x, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Ce raisonnement nous donne l'expression de la solution. Pour finir l'analyse de cette EDO et donner la solution générale, il nous faut encore déterminer le domaine de définition de ces fonctions. Or, le domaine de définition de $y(x) = Ke^x$ est $\mathbb{R}$. On conclut que la solution générale de l'EDO est, pour $K \in \mathbb{R}$, $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = Ke^x$.

(ii) Soit l'EDO $y' = y^2$. On a

$$\begin{aligned} y' = y^2 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \overset{y\neq 0}{\rightsquigarrow} \frac{dy}{y^2} = dx \rightsquigarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int 1dx + C \rightsquigarrow -\frac{1}{y} = x + C \\ \rightsquigarrow y = -\frac{1}{x+C} \end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précédent, il faut vérifier si $y = 0$ est une solution de l'EDO : on a alors $y' = 0 = y^2$ et donc $y = 0$ est une solution de l'équation.

Pour finir, regardons les domaines de définition des expressions trouvées. Le domaine de définition de $y(x) = 0$ est $\mathbb{R}$. Le domaine de définition de $\frac{-1}{x+C}$ est $\mathbb{R}\backslash\{-C\}$. Or ce dernier ensemble n'est pas un intervalle donc on le décompose $\mathbb{R}\backslash\{-C\} =]-\infty, -C[\cup]-C, +\infty[$. En conclusion, la solution générale est

— $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 0$,
— Pour $C \in \mathbb{R}$, $y\colon]-\infty, -C[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = -\frac{1}{x+C}$,
— Pour $C \in \mathbb{R}$, $y\colon]-C, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = -\frac{1}{x+C}$.

Si en plus, on demandait à ce que y soit solution d'un problème au valeurs initiales, par exemple, on demande que $y(-1) = 2$, on commence par choisir C telle que $y(-1) = 2$. Si $y(x) = 0$, $y(-1) = 2$ n'est pas possible, si $y(x) = -\frac{1}{x+C}$, alors,

$$\begin{aligned} 2 =& y(-1) = -\frac{1}{-1+C} = \frac{1}{1-C} \\ 2-2C =& 1 \\ 2C =& 1 \\ C =& \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On sait donc que l'expression de notre solution sera $y(x) = -\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$, la question qui reste est, sur quel domaine ? On choisit le domaine parmi ceux qu'on a trouvé dans la solution générale en choisissant l'intervalle qui contient -1 : On doit choisir parmi $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Or, $1 \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et donc, la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

est $y\colon \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = -\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$.

(iii) Trouver la solution maximale de l'EDO $2y^3 + 3xy^2y' = 0$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$. On a

$$\begin{aligned}2y^3 + 3xy^2y' = 0 &\rightsquigarrow 2y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0 \rightsquigarrow 3xy^2dy = -2y^3dx \overset{y\neq 0}{\rightsquigarrow} \frac{3}{y}dy = -\frac{2}{x}dx \\ &\rightsquigarrow \int \frac{3}{y}dy = -\int \frac{2}{x}dx + C \rightsquigarrow 3\log|y| = -2\log|x| + C \\ &\rightsquigarrow \log|y| = -\frac{2}{3}\log|x| + \frac{C}{3} \rightsquigarrow |y| = e^{\frac{C}{3}}|x|^{-\frac{2}{3}} \\ &\rightsquigarrow y = \pm e^{\frac{C}{3}}\frac{1}{|x|^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

Remarquons que $\pm e^{\frac{C}{3}}$ est une constante réelle non-nulle, qu'on peut renommer $K \in \mathbb{R}^*$. Pour finir, remarquons qu'en remplaçant $y = 0$ dans l'équation, $y = 0$ est également une solution qu'on récupère sous la forme $K\frac{1}{|x|^{\frac{2}{3}}}$ avec $K = 0$.
Si on nous avait demandé la solution générale de l'EDO, on aurait commencé par déterminer le domaine de définition de y. Vu qu'on demande seulement la solution maximale du problème aux valeurs initiales, on commence par choisir la constante K avant de s'intéresser au domaine de définition. On doit avoir

$$2 = y(1) = K = \frac{1}{1^{\frac{2}{3}}} = K,$$

Ainsi, $K = 2$, le domaine de définition de $y(x) = \frac{2}{|x|^{\frac{2}{3}}}$ est $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et on choisit l'intervalle qui contient 1. On a donc que la solution maximale du problème aux valeurs initiales est $y\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 2\frac{1}{|x|^{\frac{2}{3}}}$.

1.3 EDOs du premier ordre linéaires

Définition 1.16 (Equation linéaire du premier ordre, homogène, inhomogène)**.**
Soit $E(x, y, y') = 0$ une EDO du premier ordre. L'equation est *linéaire* si il existe p, q deux fonctions telles que l'EDO s'écrit

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Si de plus, $q = 0$, on dit que l'équation est *homogène*, si $q \neq 0$, l'équation est *inhomogène*

Remarque 1.17. (i) Si q n'est pas un multiple constant de p, l'équation n'est pas à variable séparée. Il nous faut une nouvelle méthode pour la résoudre.

(ii) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Alors, $C^1(I)$ et $C^0(I)$ sont de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension infinie. Considérons l'application $L\colon C^1(I) \to C^0(I)$ définie par $L(y) = y' + p \cdot y$. Alors, L est linéaire : si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in C^1(I)$, on a par linéarité de la dérivée,

$$\begin{aligned}L(\alpha y_1 + \beta y_2) =& (\alpha y_1 + \beta y_2)' + p(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(y_1' + p \cdot y_1) + \beta(y_2' + p \cdot y_2) \\ =& \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).\end{aligned}$$

Ainsi, si $\operatorname{Ker} L = \{y \in C^1(I) \ : \ L(y) = 0\} = \{y \in C^1(I) \ : \ y' + p \cdot y = 0\}$, on a que toutes les solutions de l'équation $y' + p \cdot y = q$, i.e. les solutions de $L(y) = q$ sont données par

$$\{y = y_p + y_h \ : \ y_h \in \operatorname{Ker} L\}$$

où y_p est une solution (n'importe laquelle) de $y_p' + p \cdot y_p = q$.

On appelle y_p une *solution particulière* de $y' + p \cdot y = q$ et $\operatorname{Ker} L$ l'ensemble des *solutions de l'équation homogène* ; c'est l'ensemble des solutions de $y' + p \cdot y = 0$, i.e. on transforme l'équation de base en une équation homogène en remplaçant q par 0. On écrit souvent y_h pour une solution de l'équation homogène.

De plus, pour les équations linéaires d'ordre 1, $\operatorname{Ker}(L)$ est généralement un espace vectoriel de dimension 1.

(*iii*) Comme mentionné ci-dessus trouver toutes les solutions de l'équation peut donc se séparer en deux étapes : trouver **une** solution particulière, et trouver **toutes** les solutions de l'équation homogène.

Pour trouver toutes les solutions de l'équation homogène, on peut procéder par séparation des variables. On va développer deux techniques pour trouver la solution particulière.

Méthode 1.18 (Séparation des variables sur l'équation homogène + Variation de la constante)**.**
Soit $y' + p(x)y = q$ une EDO d'ordre 1 linéaires. On trouve la solution générale de cette EDO en deux étapes.
Étape 1 : On trouve toutes les solutions de l'équation homogène $y' + p(x)y = 0$ par séparation des variables.
On a

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = 0 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \overset{y\neq 0}{\rightsquigarrow} \frac{dy}{y} = -p(x) \rightsquigarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int p(x)dx + C \\ \rightsquigarrow \log|y| = -\int p(x)dx + C \rightsquigarrow |y| = e^C e^{-\int p(x)dx} \rightsquigarrow y = \pm e^C e^{-\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

On pose $K = \pm e^C \in \mathbb{R}^*$ et l'expression de notre solution est de la forme $y(x) = Ke^{-\int p(x)dx}$. De plus, on doit encore tester $y = 0$ vu qu'on a du travailler sous l'hypothèse $y \neq 0$. Par vérification directe, $y(x) = 0$ est une solution qu'on récupère sous la forme $y(x) = Ke^{-\int p(x)dx}$ pour $K = 0$. En conclusion, la solution générale de l'équation homogène est $y(x) = Ke^{-\int p(x)dx}$ avec $K \in \mathbb{R}$
Étape 2 : On trouve une solution particulière de la forme $y_p(x) = K(x)e^{-\int p(x)dx}$.
En injectant $y_p(x) = K(x)e^{-\int p(x)dx}$ dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} y_p'(x) + p(x)y_p(x) =& K'(x)e^{-\int p(x)dx} + K(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)K(x)e^{-\int p(x)dx} \\ =& K'(x)e^{-\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $K(x)$ est une solution de $K'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, on a que $y_p(x) = K(x)e^{-\int p(x)dx}$ est une solution de l'EDO. Or, cette nouvelle équation peut être résolue par intégration directe :

$$K'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow K(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx.$$

Exemple 1.19.
Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + xy = 4x\sqrt{1+x^2} \\ y(0) = 14 \end{cases}$$

On a

$$(1+x^2)y' + xy = 4x\sqrt{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=p(x)} y = \underbrace{\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}}_{=q(x)}$$

Étape 1 : On cherche la solution générale de l'équation homogène.
On cherche la solution générale de $y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$ par séparation des variables. On a

$$\begin{aligned}
y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0 &\rightsquigarrow \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y = 0 \overset{y\neq 0}{\rightsquigarrow} \frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2}dx \\
&\rightsquigarrow \int \frac{1}{y}dx = -\int \frac{x}{1+x^2}dx + C \rightsquigarrow \log|y| = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + C \\
&\rightsquigarrow \log|y| = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C \rightsquigarrow |y| = e^C \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&\rightsquigarrow y = \pm e^C \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Posant $K = \pm e^C \in \mathbb{R}^*$, l'expression de la solution trouvée est $y(x) = K\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On vérifie directement que $y = 0$ est également une solution de l'équation homogène qu'on récupère sous la forme ci-dessus avec $K = 0$. On conclut que la solution générale de l'équation homogène est pour $K \in \mathbb{R}$ $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_h(x) = K\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Étape 2 : On cherche une solution particulière de l'équation.
On pose $y_p(x) = K(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On a

$$y_p'(x) = K'(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + K(x)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = K'(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - K(x)\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour que y_p est soit une solution de l'équation $y' + \frac{x}{1+x^2}x = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ il faut que

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} =& y_p'(x) + \frac{x}{1+x^2}y_p(x) \\
=& K'(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - K(x)\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{1+x^2}K(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
=& K'(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&\Rightarrow K'(x) = 4x \Rightarrow K(x) = 2x^2 + C.
\end{aligned}$$

Pour finir, on a donc $y_p(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$, c'est-à-dire, la solution générale de l'équation est donnée par $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}},$$

avec $C \in \mathbb{R}$.
Étape 3 : Condition initiale.
On a

$$14 = y(0) = \frac{2\cdot 0^2}{\sqrt{1+0^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+0^2}} = C,$$

Ainsi, la solution maximale du problème de Cauchy est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \frac{2x^2 + 14}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Remarque 1.20 (Sur la constante d'intégration dans la variation de la constante)**.**
Dans l'exemple ci-dessus, au moment d'intégrer K', on a écrit

$$K(x) = 2x^2 + C.$$

Vu qu'on cherche **une** solution particulière, on n'a pas vraiment besoin de la constante. Néanmoins, garder la constante dans y_p fait que y_p est directement la solution générale de l'équation. Si on n'avait pas gardé la constante, on serait arrivé à

$$y_p(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1 + x'2}}.$$

Pour trouver la solution générale, on aurait du ajouter à ceci la solution générale de l'équation homogène :

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}},$$

qui est exactement ce qu'on a obtenu ci-dessus quand on a gardé la constante.

Méthode 1.21 (Facteur intégrant)**.**
Soit $y' + p(x)y = q(x)$ une EDO linéaire d'ordre 1. Supposons que $p \in C^0(I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Alors, il existe $P \in C^1(I)$ tel que $P'(x) = p(x)$. Remarquons que si on amplifie notre équation par $e^{P(x)}$, on a

$$\begin{aligned} y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x)}_{=\left(y(x)e^{P(x)}\right)'} = q(x)e^{P(x)} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(ye^{P(x)}\right)' = q(x)e^{P(x)}. \end{aligned}$$

En intégrant directement, on obtient

$$y(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}dx + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx + Ce^{-P(x)}.$$

Remarque 1.22.
Les calculs qui sont faits dans les méthodes 1.18, page 10 et 1.21, page 12 sont les mêmes : Quand on fait la séparation des variables sur l'équation homogène on calcule une primitive de $p(x)$ qui est le $P(x)$ qu'on a utilisé dans la méthode 1.21, page 12. De plus, quand on fait l'intégration dans la variation de la constante, on doit trouver une primitive de $q(x)e^{\int p(x)dx}$, qui est également ce qu'on calcule quand on fait l'intégration dans la méthode 1.21, page 12. On calcule $\int q(x)e^{P(x)}$.
Ainsi, la méthode ne va pas simplifier/compliquer les calculs vu que les mêmes intégrales/primitives sont calculées. D'une manière générale, la méthode du facteur intégrant est plus rapide[†] tandis que l'idée de la méthode séparation des variables puis variation de la constante se généralisera aux équations d'ordre 2.

†. ndla : la méthode du facteur intégrant est ma méthode préférée pour les EDOs d'ordre 1 linéaires !🤓

Exemple 1.23.
On résout le même problème qu'avant : Cherchons la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + xy = 4x\sqrt{1+x^2} \\ y(0) = 14 \end{cases}$$

Étape 1 : Solution générale de l'EDO par facteur intégrant.
On commence par réécrire l'équation sous la forme $y' + p(x)y = q(x)$:

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Une primitive de $\frac{x}{1+x^2}$ est $\frac{1}{2}\log(1+x^2) = \log\left(\sqrt{1+x^2}\right)$. On amplifie l'équation par $e^{\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)} = \sqrt{1+x^2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2}y' + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y = 4x \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{1+x^2}y\right)' = 4x \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2}y = 2x^2 + C \\ &\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{2x^2+C}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

La solution générale est donc $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{2x^2+C}{\sqrt{1+x^2}}$.
Étape 2 : Condition initiale.
Même chose que l'étape 3 de l'exemple 1.19, page 10.

Définition 1.24 (EDO du premier ordre linéaire à coefficient constant)**.**
Soit $y' + p(x)y = q(x)$ une EDO linéaire d'ordre 1. On dit que l'EDO est *à coefficient constant* si $p(x)$ est constant, c'est-à-dire, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = a$ pour tout x.

Exemple 1.25 (Séparation des variables sur l'équation homogène + coefficients indéterminés)**.**
Soit l'équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants

$$y' + 2y = 2x^2 - 2x + 4.$$

Trouvons la solution générale du problème.
Étape 1 : On résout l'équation homogène par séparation des variables.
On a

$$\begin{aligned} y' + 2y = 0 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \overset{y\neq 0}{\rightsquigarrow} \frac{dy}{y} = -2dx \rightsquigarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int 2dx + C \\ \rightsquigarrow \log|y| = -2x + C \rightsquigarrow |y| = e^C e^{-2x} \rightsquigarrow y = \pm e^C e^{-2x}. \end{aligned}$$

Posant $K = \pm e^C \in \mathbb{R}^3$, on a que l'expression de notre solution est $y(x) = Ke^{-2x}$. De plus, on vérifie directement que $y = 0$ est une solution de l'équation homogène qu'on récupère sous la forme ci-dessus pour $K = 0$. On conclut que la solution générale de l'équation homogène est $y_h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_h(x) = Ke^{-2x},$$

pour $K \in \mathbb{R}$

Étape 2 : On trouve une solution particulière de l'équation avec la méthode des coefficients indéterminés.
Vu que $q(x)$ est un polynôme de degré 2, on cherche une solution qui est également un polynôme de degré 2. On pose

$$y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

On a alors

$$y_p'(x) = 2\alpha x + \beta,$$

et donc pour que y_p soit une solution de l'équation, il faut

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x + 4 =& y_p'(x) + 2y_p(x) = 2\alpha x + \beta + 2\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) \\ =& 2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + \beta + 2\gamma \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de ces deux polynômes termes à termes, on arrive au système

$$\begin{cases} 2\alpha = 2 \\ 2\alpha + 2\beta = -2 \\ \beta + 2\gamma = 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 3.$$

Et donc $y_p(x) = x^2 - 2x + 3$ est une solution particulière de l'équation. Pour finir, la solution générale de l'équation est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = x^2 - 2x + 3 + Ke^{-2x},$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

Méthode 1.26 (Séparation des variables sur l'équation homogène + coefficients indéterminés, cas où q ne ressemble pas à y_h)**.**
Soit $y' + ay = q(x)$ une EDO linéaire du premier ordre à coefficients constant.
Supposons que $q(x)$ ait une des formes suivantes :

$$q(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + ... + \xi_n x^n \qquad (\xi_i \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} q(x) =& \xi_0 \sin(\mu x) + \xi_1 x \sin(\mu x) + ... + \xi_n x^n \sin(\mu x) \\ &+ \eta_0 \cos(\mu x) + \eta_1 x \cos(\mu x) + ... + \eta_n x^n \cos(\mu x) \qquad (\xi_i, \eta_i, \mu \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x} + ... + \xi_n x^n e^{\lambda x} \qquad (\xi_i, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq -a)$$

$$\begin{aligned} q(x) =& \xi_0 \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \xi_1 x \sin(\mu x e^{\lambda x}) + ... + \xi_n x^n \sin(\mu x) e^{\lambda x} \\ &+ \eta_0 \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \eta_1 x \cos(\mu x) e^{\lambda x} + ... + \eta_n x^n \cos(\mu x) e^{\lambda x} \qquad (\xi_i, \eta_i, \mu, \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Étape 1 : On trouve la solution générale de l'équation homogène par séparation des variables.
Identique que l'étape 1 de la méthode 1.18, page 10, et donne $y_h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = Ke^{-ax},$$

avec $K \in \mathbb{R}$.
Étape 2 : On trouve une solution particulière à l'aide de la méthode des *coefficients indéterminés.*

On pose y_p un fonction qui a la même forme que q :

$$y_p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n \qquad (\alpha_i \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \alpha_0 \sin(\mu x) + \alpha_1 x \sin(\mu x) + ... + \alpha_n x^n \sin(\mu x) \\ &+ \beta_0 \cos(\mu x) + \beta_1 x \cos(\mu x) + ... + \beta_n x^n \cos(\mu x) \qquad (\alpha_i, \beta_i, \mu \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$y_p(x) = \alpha_0 e^{\lambda x} + \alpha_1 x e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x} \qquad (\alpha_i, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq -a)$$

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \alpha_0 \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \alpha_1 x \sin(\mu x e^{\lambda x}) + ... + \alpha_n x^n \sin(\mu x) e^{\lambda x} \\ &+ \beta_0 \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \beta_1 x \cos(\mu x) e^{\lambda x} + ... + \beta_n x^n \cos(\mu x) e^{\lambda x} \qquad (\alpha_i, \beta_i, \mu, \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Et on injecte ceci dans l'équation $y_p'(x) + a y_p(x) = q(x)$. On cherche ensuite les α_i et β_i pour que y_p soit solution d'e l'équation.
On construit finalement la solution générale en posant $y = y_p + y_h$.

Exemple 1.27. (i) Soit l'équation différentielle $y' + 2y = 8x\cos(2x)$.
Étape 1 : Solution générale de l'équation homogène.
Par séparation des vairiables, on trouve $y_h(x) = Ke^{-2x}$, $K \in \mathbb{R}$.
Étape 2 : Solution particulière de l'équation avec la méthode des coefficients indéterminés.
Pour choisir la forme de y_p, on choisit une ligne des différentes formes de q données dans la méthode 1.26, page 14 et on choisit n. Ici, on prend la deuxième ligne et $n = 1$:

$$q(x) = \xi_0 \sin(\mu x) + \xi_1 x \sin(\mu x) + \eta_0 \cos(\mu x) + \eta_1 x \cos(\mu x)$$

avec $\xi_0 = \xi_1 = \eta_0 = 0$, $\eta_1 = 8$ et $\mu = 2$.
On cherche donc y_p de la forme

$$y_p(x) = \alpha_0 \sin(2x) + \alpha_1 x \sin(2x) + \beta_0 \cos(2x) + \beta_1 x \cos(2x).$$

On a alors

$$\begin{aligned} y_p'(x) =& 2\alpha_0 \cos(2x) + \alpha_1 \sin(2x) + 2\alpha_1 x \cos(2x) \\ &- 2\beta_0 \sin(2x) + \beta_1 \cos(2x) - 2\beta_1 x \sin(2x) \\ =& (\alpha_1 - 2\beta_0) \sin(2x) + (-2\beta_1) x \sin(2x) + (2\alpha_0 + \beta_1) \cos(2x) + 2\alpha_1 x \cos(2x). \end{aligned}$$

Et donc, pour que y_p soit une solution de l'équation, on a besoin de

$$\begin{aligned} q(x) =& 8x \cos(2x) = y_p'(x) + 2y_p(x) \\ =& (\alpha_1 - 2\beta_0) \sin(2x) + (-2\beta_1) x \sin(2x) + (2\alpha_0 + \beta_1) \cos(2x) + 2\alpha_1 x \cos(2x) \\ &+ 2\left(\alpha_0 \sin(2x) + \alpha_1 x \sin(2x) + \beta_0 \cos(2x) + \beta_1 x \cos(2x)\right) \\ =& (2\alpha_0 + \alpha_1 - 2\beta_0) \sin(2x) + (2\alpha_1 - 2\beta_1) x \sin(x) \\ &+ (2\beta_0 + 2\alpha_0 + \beta_1) \cos(2x) + (2\beta_1 + 2\alpha_1) x \cos(2x) \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme les coefficients, on doit avoir que

$$\begin{cases} 2\alpha_0 + \alpha_1 - 2\beta_0 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ 2\beta_0 + 2\alpha_0 + \beta_1 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\alpha_1 = 8 \end{cases}$$

En regardant les lignes 2 et 4, on a un sous-système qui détermine α_1 et β_1 :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\alpha_1 = 8 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = 2.$$

Les équations qui restent donnent alors

$$\begin{cases} 2\alpha_0 + 2 - 2\beta_0 = 0 \\ 2\beta_0 + 2\alpha_0 + 2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_0 = -1,\ \beta_0 = 0.$$

On conclut que $y_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$y_p(x) = -\sin(2x) + 2x\sin(2x) + 2x\cos(2x)$$

et donc la solution générale de l'équation est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = -\sin(2x) + 2x\sin(2x) + 2x\cos(2x) + Ke^{-2x}$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit l'équation différentielle $y' + 2y = 4x^2e^{2x} + 2xe^{2x} - 4e^{2x}$.
Étape 1 : Solution générale de l'équation homogène.
Comme précédemment, $y_h = Ke^{-2x}$.
Étape 2 : Solution particulière de l'équation à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.
On choisit la troisième forme de la méthode 1.26, page 14 et $n = 2$. On a

$$q(x) = 4x^2e^{2x} + 2xe^{2x} - 4e^{2x} = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 xe^{\lambda x} + \xi_2 x^2 e^{\lambda x},$$

avec $\xi_0 = -4$, $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 4$ et $\lambda = 2$ (on a bien $\lambda = 2 \neq -2 = -a$).
On cherche donc y_p de la forme

$$y_p(x) = \alpha_0 e^{2x} + \alpha_1 xe^{2x} + \alpha_2 x^2 e^{2x}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} y_p'(x) =& 2\alpha_0 e^{2x} + \alpha_1 e^{2x} + 2\alpha_1 xe^{2x} + 2\alpha_2 xe^{2x} + 2\alpha_2 x^2 e^{2x} \\ =& (2\alpha_0 + \alpha_1)e^{2x} + (2\alpha_1 + 2\alpha_2)xe^{2x} + 2\alpha_2 x^2 e^{2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que y_p soit une solution de l'équation, on a besoin que

$$\begin{aligned} q(x) =& 4x^2e^{2x} + 2xe^{2x} - 4e^{2x} = y_p'(x) + 2y_p(x) \\ =& (2\alpha_0 + \alpha_1)e^{2x} + (2\alpha_1 + 2\alpha_2)xe^{2x} + 2\alpha_2 x^2 e^{2x} \\ & + 2\left(\alpha_0 e^{2x} + \alpha_1 xe^{2x} + \alpha_2 x^2 e^{2x}\right) \\ =& (4\alpha_0 + \alpha_1)e^{2x} + (4\alpha_1 + 2\alpha_2)xe^{2x} + 4\alpha_2 x^2 e^{2x}. \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on arrive à

$$\begin{cases} 4\alpha_0 + \alpha_1 = -4 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 4\alpha_2 = 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1$$

et donc

$$y_p(x) = x^2 e^{2x} - e^{2x}$$

est une solution particulière de l'équation.
On conclut que la solution générale de l'équation est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = x^2 e^{2x} - e^{2x} + Ke^{-2x}$$

(*iii*) Soit l'EDO $y' + 2y = e^{-2x}$.
Étape 1 : Solution générale de l'équation homogène.
Comme avant, $y_h(x) = Ke^{-2x}$.
Étape 2 : Solution particulière de l'équation à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.
On choisit la troisième ligne des formes proposées à la méthode 1.26, page 14 et $n = 0$:

$$q(x) = e^{-2x} = \xi_0 e^{\lambda x},$$

avec $\xi_0 = 1$ et $\lambda = -2$. Remarquons que nous sommes ici dans le cas où $\lambda = -a$. Selon la méthode 1.26, page 14 on ne peut procéder par coefficients indéterminés. Essayons quand même et voyons ce qu'il se passe.
On cherche y_p de la forme

$$y_p(x) = \alpha e^{-2x}.$$

On a

$$y_p'(x) = -2\alpha e^{-2x}.$$

Ainsi, pour que y_p soit une solution de l'équation, il faut que

$$q(x) = e^{-2x} = y_p'(x) + 2y_p(x) = 2\alpha e^{-2x} - 2\alpha e^{-2x} = 0.$$

Il est donc impossible de trouver α pour que y_p soit une solution de l'équation. Il nous faut donc une autre méthode pour ce cas là.

Méthode 1.28 (Séparation des variables sur l'équation homogène + coefficients indéterminés, cas où q ressemble à y_h)**.**
Soit $y' + ay = q(x)$ une EDO linéaire du premier ordre à coefficients constant.
Supposons que $q(x)$ ait la forme suivante :

$$q(x) = \xi_0 e^{-ax} + \xi_1 x e^{-ax} + \dots + \xi_n x^n e^{-ax} \qquad (\xi_i, \lambda \in \mathbb{R})$$

Étape 1 : On trouve la solution générale de l'équation homogène par séparation des variables.
Identique que l'étape 1 de la méthode 1.18, page 10, et donne $y_h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = Ke^{-ax},$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

Étape 2 : On trouve une solution particulière à l'aide de la méthode des *coefficients indéterminés.*
On commence par l'expression comme dans la méthode 1.26, page 14. On enlève le terme sans x et on ajoute un terme avec une puissance de x supplémentaire :

$$\alpha_0 e^{-ax} + \alpha_1 x e^{-ax} + ... + \alpha_n x^n e^{-ax}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{\alpha_0 e^{-ax}} + \alpha_1 x e^{-ax} + ... + \alpha_n x^n e^{-ax} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{-ax}$$
$$\downarrow$$
$$\alpha_1 x e^{-ax} + ... + \alpha_n x^n e^{-ax} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{-ax}.$$

On choisit donc

$$y_p(x) = \alpha_1 x e^{-ax} + ... + \alpha_n x^n e^{-ax} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{-ax}$$

qu'on injecte dans l'équation et on trouve les α_i pour que y_p soit solution de l'équation. Pour finir, on conclut que $y = y_p + y_h$ est la solution générale de l'équation.

Remarque 1.29.
Au vu des différentes hypothèses dans les formes de $q(x)$ données dans la méthode 1.26, page 14, il faudrait aussi discuter le cas où $a = 0$ et $q(x)$ a la forme

$$q(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + ... + \xi_n x^n.$$

Néanmoins, dans ce cas, l'équation est

$$y' = q(x)$$

qui se résout par intégration directe.

Exemple 1.30. (i) Soit l'EDO $y' + 2y = e^{-2x}$.
Comme avant, $y_h(x) = Ke^{-2x}$.
Étape 2 : Solution particulière de l'équation à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.
On est dans la troisième ligne des différentes formes proposées par la méthode 1.26, page 14, $n = 0$ dans le cas où $\lambda = -a$. On fait donc la transformation indiquée dans la méthode 1.28, page 17.

$$\alpha_0 e^{-2x}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{\alpha_0 e^{-2x}} + \alpha_1 x e^{-2x}$$
$$\downarrow$$
$$\alpha_1 x e^{-2x}.$$

On choisit donc

$$y_p(x) = \alpha_1 x e^{-2x}.$$

On a alors

$$y_p'(x) = \alpha_1 e^{-2x} - 2\alpha_1 x e^{-2x},$$

et donc, pour que y_p soit solution de l'équation, on a besoin que

$$\begin{aligned} q(x) = &e^{-2x} = y_p'(x) + 2y_p(x) \\ = &\alpha_1 e^{-2x} - 2\alpha_1 x e^{-2x} + 2\left(\alpha_1 x e^{-2x}\right) \\ = &\alpha_1 e^{-2x} \\ &\Rightarrow \alpha_1 = 1 \end{aligned}$$

et donc $y_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_p(x) = xe^{-2x}$$

est une solution particulière de l'équation.
On conclut que la solution générale de l'EDO est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = xe^{-2x} + Ke^{-2x},$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit l'EDO $y' - 3y = 4xe^{3x}$.
Étape 1 : Solution générale de l'équation homogène.
On procède par séparation des variables, et on trouve $y_h(x) = Ke^{3x}$.
Étape 2 : Solution particulière de l'équation à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.
On est dans le cas de la troisième ligne de la méthode 1.26, page 14, $n = 1$:

$$q(x) = 4xe^{3x} = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x},$$

avec $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 4$, $\lambda = 3 = -a$. Vu que $\lambda = -a$, on commence par la transformation donnée à la méthode 1.28, page 17 :

$$\begin{gathered} \alpha_0 e^{3x} + \alpha_1 x e^{3x} \\ \downarrow \\ \cancel{\alpha_0 e^{3x}} + \alpha_1 x e^{3x} + \alpha_2 x^2 e^{3x} \\ \downarrow \\ \alpha_1 x e^{3x} + \alpha_2 x^2 e^{3x}. \end{gathered}$$

On choisit donc

$$y_p(x) = \alpha_1 x e^{3x} + \alpha_2 x^2 e^{3x}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} y_p'(x) = &\alpha_1 e^{3x} + 3\alpha_1 x e^{3x} + 2\alpha_2 x e^{3x} + 3\alpha_2 x^2 e^{3x} \\ = &\alpha_1 e^{3x} + (3\alpha_1 + 2\alpha_2) x e^{3x} + 3\alpha_2 x^2 e^{3x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que y_p soit solution de l'équation on a besoin que

$$\begin{aligned} q(x) = &4xe^{3x} = y_p'(x) - 3y_p(x) \\ = &\alpha_1 e^{3x} + (3\alpha_1 + 2\alpha_2) x e^{3x} + 3\alpha_2 x^2 e^{3x} \\ &- 3\left(\alpha_1 x e^{3x} + \alpha_2 x^2 e^{3x}\right) \\ = &\alpha_1 e^{3x} + 2\alpha_2 x e^{3x}. \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 2$$

et donc $y_p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y_p(x) = 2x^2 e^{3x}$$

est une solution de l'équation.

On conclut que la solution générale est donnée par $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = 2x^2 e^{3x} + Ke^{3x},$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.31. (*i*) Le gros avantage de cette méthode est que pour trouver la solution particulière, il n'y a aucune primitive à calculer. Par contre, son désavantage est qu'elle ne fonctionne que pour les équations à coefficients constants et seulement lorsque $q(x)$ a la bonne forme.

(*ii*) Que se passe-t-il exactement dans la méthode des coefficients indéterminés ?

On a vu dans la remarque 1.17 (*ii*), page 9 que si on définit $L(y) = y' + ay$, $L \colon C^1(I) \to C^0(I)$ est une application linéaire.

Le but de la méthode des coefficients indéterminés est de trouver deux sous-espaces vectoriels de dimension **finie**, $V \subset C^0(I)$, $V' \subset C^1(I)$ tels que $q \in V$ et $L \colon V' \to V$ est inversible, ou, de façon équivalente tels que

$$\begin{aligned} &q \in V \\ &\dim V' = \dim V < +\infty \\ &\operatorname{Ker} L \cap V' = \{0\}. \end{aligned}$$

Vu que V et V' sont des espaces vectoriels de dimension finie, on les cherche sous la forme d'ensembles de combinaisons linéaires d'une base : $V = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$ et $V' = \operatorname{span}\{e'_1, ..., e'_n\}$, où span (aussi des fois notés vect) dénote l'espace vectoriel engendré par les éléments donnés dans la liste.

On proposede comprendre l'approche en traitant un exemple. Si par exemple $q(x) = 3x^2 e^{-2x}$, alors, on commence avec $V_1 = \operatorname{span}\{x^2 e^{-2x}\}$. On rajoute des éléments à la liste de telle sorte que les dérivées successives de q sont dans l'espace : On a

$$\left(x^2 e^{-2x}\right)' = \underbrace{2xe^{-2x}}_{\text{on ajoute à la liste}} \quad \underbrace{-x^2 e^{-2x}}_{\in V_1}$$

On prend donc $V_2 = \operatorname{span}\{xe^{-2x}, x^2 e^{-2x}\}$. On a

$$\left(xe^{-2x}\right)' = \underbrace{e^{-2x}}_{\text{à ajouter à la liste}} \quad \underbrace{-2xe^{-2x}}_{\in V_2}.$$

On prend donc $V_3 = \operatorname{span}\{e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2 e^{-2x}\}$. On a

$$\left(e^{-2x}\right)' = \underbrace{-2e^{-2x}}_{\in V_3}.$$

Et vu qu'on a plus rien à ajouter, on choisit $V = V_3 = \text{span}\{e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}\}$.
Cette construction donne un espace vectoriel clos par dérivée, c'est-à-dire, si $\varphi \in V$, $\varphi' \in V$. À partir de ceci, on a que $L\colon V \to V$. En effet, si $\varphi \in V$, alors,

$$L(\varphi) = \underbrace{\varphi'}_{\in V} + \underbrace{a\varphi}_{\in V} \in V.$$

Si de plus, $\text{Ker}\, L \cap V = \{0\}$, alors on a toutes les propriétés voulues. Cette construction est ce qui se cache derrière la méthode 1.26, page 14. Remarquons à ce stade que $\text{Ker}\, L$ est l'ensemble des solution de l'équation homogène, qui dans ce cas sont $y_h(x) = Ke^{-ax}$. Ainsi, $\text{Ker}\, L \cap V = \{0\}$ est la raison pour laquelle on doit supposer $\lambda \neq -a$ dans la troisième forme de $q(x)$.
Plus généralement, l'idée est de commencer avec $V_1 = \text{span}\{q\}$ et d'ajouter des éléments à cette base en calculant les dérivées successives des éléments de la base, en espérant que ce processus s'arrête en un nombre fini d'étapes.
Dans le cas où la construction donne quelque chose tel que $\text{Ker}\, L \cap V \neq \{0\}$, alors, vu que $\text{Ker}\, L = \text{span}\{e^{-ax}\}$ est un espace vectoriel de dimension 1, en faisant l'équivalent de la transformation de la méthode 1.28, page 17 sur la base, on a

$$\begin{gathered} V = \text{span}\{e^{-ax}, xe^{-ax}, x^2e^{-ax}, ..., x^ne^{-ax}\} \\ \downarrow \\ \text{span}\{\cancel{e^{-ax}}, xe^{-ax}, x^2e^{-ax}, ..., x^ne^{-ax}, x^{n+1}e^{-ax}\} \\ \downarrow \\ V' = \text{span}\{xe^{-ax}, x^2e^{-ax}, ..., x^ne^{-ax}, x^{n+1}e^{-ax}\} \end{gathered}$$

On a alors que V' n'est plus clos par dérivée, mais on a que la dimension de V' est la même que V, on peut vérifier que $L\colon V' \to V$ et $\text{Ker}\, L \cap V' = \{0\}$, et donc, on a à nouveau toutes les propriétés voulues.

Proposition 1.32 (Principe de superposition)**.**
Soit l'EDO linéaire du premier ordre

$$y' + p(x)y = q_1(x) + q_2(x)$$

Si y_1 est une solution de $y' + p(x)y = q_1(x)$ et y_2 est une solution de $y' + p(x)y = q_2(x)$, alors, $y = y_1 + y_2$ est une solution de

$$y' + p(x)y = q_1(x) + q_2(x)$$

Pour la démonstration, voir page 94.

Exemple 1.33.
Soit l'équation différentielle $y' - 2y = 2xe^{2x} - 2x^2 + 2x + 2$.
Étape 1 : Solution générale de l'équation homogène.
On procède par séparation des variables et on trouve $y_h(x) = Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$.
Étape 2 : Solution particulière de l'équation par la méthode des coefficients indéterminés.
Si on regarde le membre de droite de l'équation, il y a deux parties qui entrent dans deux catégories différentes décrites dans la méthode 1.26, page 14. En effet, on a $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ avec $q_1(x) = 2xe^{2x}$ et $q_2(x) = -2x^2 + 2x + 2$.
L'idée est de trouver une solution particulière $y_{p,1}$ de $y' - 2y = q_1(x)$ et $y_{p,2}$ de $y' - 2y = q_2(x)$.
On aura alors que $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ sera une solution particulière de $y' - 2y = q(x)$, par le principe de superposition.

On commence par chercher $y_{p,1}$:
$q_1(x) = 2xe^{2x}$ correspond à la troisième catégorie de la méthode 1.26, page 14 avec $n = 1$. On a

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x},$$

avec $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 2$ et $\lambda = 2 = -(-2)$. On est donc dans la situation où $\lambda = -a$ et on commence par faire la transformation de la méthode 1.28, page 17 :

$$\begin{gathered} \alpha_0 e^{2x} + \alpha_1 x e^{2x} \\ \downarrow \\ \cancel{\alpha_0 e^{2x}} + \alpha_1 x e^{2x} {\color{red}+\alpha_2 x^2 e^{2x}} \\ \downarrow \\ \alpha_1 x e^{2x} + \alpha_2 x^2 e^{2x}, \end{gathered}$$

on choisit donc

$$y_{p,1}(x) = \alpha_1 x e^{2x} + \alpha_2 x^2 e^{2x}$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_{p,1}(x) =& \alpha_1 e^{2x} + 2\alpha_1 x e^{2x} + 2\alpha_2 x e^{2x} + 2\alpha_2 x^2 e^{2x} \\ =& \alpha_1 e^{2x} + (2\alpha_1 + \alpha_2) x e^{2x} + 2\alpha_2 x^2 e^{2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que $y_{p,1}$ soit solution de $y' - 2y = q_1(x)$, on a besoin que

$$\begin{aligned} q_1(x) =& 2xe^{2x} = y'_{p,1}(x) - 2y_{p,1}(x) \\ =& \alpha_1 e^{2x} + (2\alpha_1 + \alpha_2) x e^{2x} + 2\alpha_2 x^2 e^{2x} - 2\left(\alpha_1 x e^{2x} + \alpha_2 x^2 e^{2x}\right) \\ =& \alpha_1 e^{2x} + 2\alpha_2 x^{e2x}. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients termes à termes, on doit avoir

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 1.$$

Ainsi, $y_{p,1}(x) = x^2 e^{2x}$ est une solution particulière de $y' - 2y = q_1(x)$.
Passons à la recherche de $y_{p,2}$:
$q_2(x) = -2x^2 + 2x + 2$ correspond à la première catégorie de la méthode 1.26, page 14 :

$$q_2(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2,$$

avec $\xi_0 = \xi_1 = 2$ et $\xi_2 = -2$. On choisit donc

$$y_{p,2}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2.$$

On a alors

$$y'_{p,2}(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x$$

Ainsi, pour que $y_{p,2}$ soit une solution de $y' - 2y = q_2(x)$, on a besoin que

$$\begin{aligned} q_2(x) =& -2x^2 + 2x + 2 = y'_{p,2}(x) - 2y_{p,2}(x) \\ =& \alpha_1 + 2\alpha_2 x - 2\left(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2\right) \\ =& -2\alpha_2 x^2 + (2\alpha_2 - 2\alpha_1)x + \alpha_1 - 2\alpha_0. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients terme à terme, on doit à avoir

$$\begin{cases} -2\alpha_2 = -2 \\ (2\alpha_2 - 2\alpha_1) = 2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_0 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1.$$

Ainsi, $y_{p,2}(x) = -1 + x^2$ est une solution particulière de $y' - 2y = q_2(x)$.
En conclusion, $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = x^2 e^{2x} - 1 + x^2$ est une solution particulière de $y' - 2y = q(x)$ et donc la solution générale est $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = x^2 e^{2x} - 1 + x^2 + Ke^{2x},$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

1.4 EDOs du deuxième ordre linéaires à cœfficients constants

Définition 1.34 (Edo du deuxième ordre linéaire à coefficients constants)**.**
Une EDO d'ordre 2 $E(x, y, y', y'') = 0$ est dite *linéaire à coefficients constants* si il existe $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et une fonction $q(x)$ tels que l'EDO peut se réécrire

$$ay'' + by' + cy = q(x).$$

Si de plus, $q = 0$, l'équation est *homogène*, si $q \neq 0$, l'équation est *inhomogène*.

Définition 1.35 (Solutions linéairement indépendantes)**.**
Soit $ay'' + by' + cy = 0$ une EDO linéaire du deuxième ordre homogène, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $y_1, y_2 \in C^2(I)$ deux solutions de cette équation.
On dit que les solutions y_1, y_2 sont *linéairement dépendantes* si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pas tous deux nuls tels que pour tout $x \in I$,

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0.$$

On dit que les solutions y_1, y_2 sont *linéairement indépendantes* si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in I, \\ \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Remarque 1.36. (*i*) Comme dans le cas des équations linéaires d'ordre 1, $L\colon C^2(I) \to C^0(I)$ définie par $L(y) = ay'' + by' + cy$ est une application linéaire. La solution générale de l'EDO a donc la forme $y_p + y_h$ où y_h est une solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ (i.e. $y_h \in \operatorname{Ker} L$) et y_p est une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = q(x)$.

Pour les équations d'ordre 2, l'espace des solutions de l'équation homogène, $\operatorname{Ker} L$ est de dimension deux. La solution générale de l'équation homogène a donc la forme $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

(*ii*) Inspiré par la solution générale de l'équation homogène pour les EDOs linéaires du premier ordre à coefficients constants ($y' + a \cdot y = 0 \Rightarrow y = Ke^{-ay}$) on peut regarder ce qu'il se passe si on cherche une solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ de la forme $y(x) = e^{\lambda x}$. En injectant ceci dans l'équation, on obtient

$$0 = ay''(x) + by'(x) + cy(x) = a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x}$$

Ainsi, si le polynôme en λ, $a\lambda^2 + b\lambda + c$ (appelé *polynôme caractéristique de l'EDO*) s'annule, on a une solution de l'équation homogène.

Proposition 1.37.
Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et l'équation d'ordre 2 linéaire à coefficients constants, homogène

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) Si $\Delta > 0$, $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}x} \\ y_2(x) =& e^{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}x} \end{aligned}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation.

(ii) Si $\Delta = 0$, $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^{\frac{-b}{2a}x} \\ y_2(x) =& xe^{\frac{-b}{2a}x} \end{aligned}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation.

(iii) si $\Delta < 0$, $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^{\frac{-b}{2a}x} \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x\right) \\ y_2(x) =& e^{\frac{-b}{2a}x} \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x\right) \end{aligned}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation.

Pour la démonstration, voir page 94.

Remarque 1.38. (i) Pour retrouver les formules de la proposition, on peut procéder de la façon suivante : on écrit le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

dont on cherche les racines. Puis, on a les trois cas suivants :
Cas 1 : p a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2. Les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.
Cas 2 : p a une racine réelle double λ. Les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont $y_1(x) = e^{\lambda x}$ et $y_2(x) = xe^{\lambda x}$.
Cas 3 : p n'a pas de racine réelle. Alors, p a deux racines complexes conjuguées : $\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$. Les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont $y_1(x) = e^{\lambda x}\sin(\mu x)$ et $y_2(x) = xe^{\lambda x}\cos(\mu x)$

(ii) Dans le cas où les racines de p sont complexes conjuguées : $\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$, on peut procéder de façon similaire à ce qu'on a dans le cas où p a deux racines réelles :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) =& e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x}(\cos(\mu x) + i\sin(\mu x)) \\ \tilde{y}_2(x) =& e^{(\lambda-i\mu)x} = e^{\lambda x}(\cos(\mu x) - i\sin(\mu x)) \end{aligned}$$

Le problème que ces deux solutions linéairement indépendantes présentent est qu'elles sont à valeur complexe. Si on suppose que C_1 et C_2 sont des constantes complexes mais $y(x) = C_1\tilde{y}_1(x) + C_2\tilde{y}_2(x)$ est à valeur réelle, alors, on a

$$\begin{aligned} 0 =& \operatorname{Im}(y(x)) = \operatorname{Im}\left(C_1\tilde{y}_1(x) + C_2\tilde{y}_2(x)\right) \\ =& e^{\lambda x}\left(\operatorname{Im}(C_1 + C_2)\cos(\mu x) - \operatorname{Re}(C_1 - C_2)\sin(\mu x)\right). \end{aligned}$$

Du fait que sinus et cosinus soient linéairement indépendantes, ceci implique que $\operatorname{Im}(C_2) = -\operatorname{Im}(C_1)$ et $\operatorname{Re}(C_2) = \operatorname{Re}(C_1)$, c'est-à-dire, C_1 et C_2 sont conjuguées l'une de l'autre. Ainsi,

$$\begin{aligned} y(x) =& C_1\tilde{y}_1(x) + \overline{C_1}\tilde{y}_2(x) = (C_1 + \overline{C_1})e^{\lambda x}\cos(\mu x) + i(C_1 - \overline{C_1})e^{\lambda x}\sin(\mu x) \\ =& 2\operatorname{Re}(C_1)e^{\lambda x}\cos(\mu x) - 2\operatorname{Im}(C_1)e^{\lambda x}\sin(\mu x). \end{aligned}$$

Ainsi, y est bien une combinaison linéaire réelle de $y_1(x) = e^{\lambda x}\sin(\mu x)$ et $y_2(x) = e^{\lambda x}\cos(\mu x)$.

Méthode 1.39 (Polynôme caractéristique+Variation de la constante)**.**
Soit une EDO linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = q(x)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
Étape 1 : On trouve deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ à l'aide du polynôme caractéristique.
En utilisant la proposition 1.37, on peut toujours trouver $y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R})$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.
Étape 2 : On trouve une solution particulière de l'équation à l'aide de la variation de la constante.
On cherche $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, où C_1 et C_2 sont solution du système

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{1}{a}q(x). \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}q(x) \end{pmatrix}$$

Résoudre ce système algébrique donne C_1' et C_2' et ensuite, en prenant une primitive, on obtient C_1 et C_2.

Remarque 1.40.
Au vu de la méthode, on peut se poser trois questions : Est-ce que ça marche ? D'où ça sort ? Le système algébrique a-t-il toujours une solution ?

(i) Est-ce que ça marche ?
Oui, on peut le vérifier de façon directe. On injecte $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ dans $ay'' + by' + cy$ et on vérifie si on trouve $q(x)$. On a

$$\begin{aligned} y_p(x) =& C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \\ y_p'(x) =& \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)}_{=0} + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ =& C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ y_p''(x) =& \underbrace{C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)}_{=\frac{1}{a}q(x)} + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \\ =& \frac{1}{a}q(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) \end{aligned}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
ay_p''(x) + by_p'(x) + cy_p(x) =& q(x) + C_1(x) \underbrace{\left(ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x)\right)}_{=0} \\
&+ C_1(x) \underbrace{\left(ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x)\right)}_{=0} = q(x)
\end{aligned}
$$

et donc cette méthode nous donne bien une solution de l'EDO.

(ii) D'où ça sort ?
Pour comprendre d'où sort ceci, il faut commencer par passer au système d'EDOs d'ordre 1 équivalent (voir remarque 1.52, page 39). On a donc que l'équation est équivalente au système

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}}_{:=M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q}{a} \end{pmatrix}
$$

On peut vérifier alors que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ sont deux solution linéairement indépendantes du système homogène. Si on cherche maintenant une solution particulière de la forme $y_p(x) = C_1(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$, on a

$$
\begin{aligned}
y_p'(x) =& C_1'(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + C_2'(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} + C_1(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix}' + C_2(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}' \\
=& \begin{pmatrix} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) \end{pmatrix} + C_1(x)M \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + C_2(x)M \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) \end{pmatrix} + My_p(x).
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour que y_p soit une solution de l'équation, il suffit que

$$
\begin{pmatrix} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q}{a} \end{pmatrix},
$$

qui est précisément le système qu'on a posé dans la méthode.

(iii) Le système algébrique a-t-il toujours une solution ?
Tant que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, oui. C'est garantit par la proposition 1.42, page 27.

Définition 1.41 (Wronskien)**.**
Soit $ay'' + by' + cy = q(x)$ une EDO du second ordre linéaire à coefficients constants et y_1, y_2 deux solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$. Le *wronskien* de y_1, y_2 est défini par

$$
W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).
$$

Proposition 1.42.
Soit $ay'' + by' + cy = q(x)$ une EDO du second ordre linéaire à coefficients constants, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $y_1, y_2 \in C^1(I)$ deux solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ et leur wronskien

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Alors,

(i) on a soit $\forall x \in I$, $W[y_1, y_2](x) = 0$ soit pour tout $x \in I$, $W[y_1, y_2](x) \neq 0$

(ii) y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si $\forall x \in I$, $W[y_1, y_2](x) \neq 0$.

Pour la démonstration, voir page 96.

Remarque 1.43. (i) Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'EDO, on a que pour tout $x \in I$, $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ et donc, pour tout $x \in I$ la matrice

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

est inversible. En particulier, on pourra toujours trouver une solution du système qui apparait dans la variation de la constante (voir méthode 1.39, page 25) :

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} q(x) \end{pmatrix}$$

(ii) Remarquons de plus qu'en utilisant la formule pour l'inverse d'une matrice carrée de dimension 2, on a une formule directe pour C_1' et C_2' :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} q(x) \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} q(x) \end{pmatrix} \\
& \qquad = \frac{1}{W[y_1, y_2](x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} q(x) \end{pmatrix} \\
& \qquad = \begin{pmatrix} \dfrac{-y_2(x) q(x)}{a W[y_1, y_2](x)} \\[2ex] \dfrac{y_1(x) q(x)}{a W[y_1, y_2](x)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple 1.44. (i) Soit l'EDO $y'' + y' - 2y = 3 - 2x^2$.

Étape 1 : Polynôme caractéristique pour les solutions de l'équation homogène.

Le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1),$$

dont les racines sont -2 et 1. Vu qu'on a deux racines réelles, les solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène sont $y_1(x) = e^x$ et $y_2(x) = e^{-2x}$.

Étape 2 : Variation de la constante.

On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ où C_1 et C_2 sont des solutions de

$$\begin{cases} e^x C_1'(x) + e^{-2x} C_2'(x) = 0 \\ e^x C_1'(x) - 2e^{-2x} C_2'(x) = 3 - 2x^2 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on arrive à

$$3e^{-2x} C_2'(x) = 2x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = e^{2x}\left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right).$$

En réinjectant ceci dans la première équation, on arrive à

$$e^x C_1'(x) = 1 - \frac{2}{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = e^{-x}\left(1 - \frac{2}{3}x^2\right)$$

Remarquons qu'on aurait pu arriver à ceci de façon directe en utilisant la remarque 1.43, page 27. On a

$$W[y_1, y_2](x) = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}$$

et donc,

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{y_2(x)q(x)}{aW[y_1,y_2](x)} = -\frac{e^{-2x}(3-2x^2)}{-3e^{-x}} = e^{-x}\left(1 - \frac{2}{3}x^2\right) \\ C_2'(x) &= \frac{y_1(x)q(x)}{aW[y_1,y_2](x)} = \frac{e^x(3-2x^2)}{-3e^{-x}} = e^{2x}\left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Enfin, calculons les primitives de ces fonctions pour trouver C_1 et C_2. En utilisant des intégrations par parties successives (on dérive toujours la partie polynomiale, et on intègre toujours la partie exponentielle), on a

$$\begin{aligned} \int^x t^2 e^{-t} &\overset{\text{IPP}}{=} -x^2 e^{-x} + 2\int^x te^{-t}dt \overset{\text{IPP}}{=} -x^2e^{-x} + 2\left(x(-e^{-x}) - 2\int^x -e^{-t}dt\right) \\ &= -(x^2+2x)e^{-x} + 2\int^x e^{-t}dt = -(x^2+2x+2)e^{-x} \\ \int^x t^2 e^{2t}dt &\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int^x te^{2t}dt \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int^x e^{2t}dt \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -e^{-x} - \frac{2}{3}\left(-(x^2+2x+2)e^{-x}\right) + K_1 = \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)e^{-x} + K_1 \\ C_2(x) &= \frac{1}{3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + K_2 = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)e^{2x} + K_2 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution particulière est

$$\begin{aligned} y_p(x) &= C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \\ &= \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + K_1e^x + K_2e^{-2x} \\ &= x^2 + x + K_1e^x + K_2e^{-2x}, \end{aligned}$$

et vu qu'on a gardé les constantes K_1 et K_2 dans $C_1(x)$ et $C_2(x)$, on obtient ainsi la solution générale de l'EDO.
Si on avait des conditions initiales du style $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$, on ajusterait K_1 et K_2 pour que y vérifie ces conditions initiales.

(ii) Soit l'EDO $y'' - 2y' + 2y = e^x$.

Étape 1 : Polynôme caractéristique pour les solutions de l'équation homogène.
Le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

dont les racines sont

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Ainsi, les deux solutions linéairement indépendantes sont

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^{\mathrm{Re}(1+i)x} \cos(\mathrm{Im}(1+i)x) = e^x \cos(x) \\ y_2(x) =& e^{\mathrm{Re}(1+i)x} \sin(\mathrm{Im}(1+i)x) = e^x \sin(x). \end{aligned}$$

Étape 2 : Variation de la constante.
On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ où C_1 et C_2 sont des solutions de

$$\begin{cases} e^x \cos(x) C_1'(x) + e^x \sin(x) C_2'(x) = 0 \\ \left(e^x \cos(x) - e^x \sin(x)\right) C_1'(x) + (e^x \sin(x) + e^x \cos(x))) C_2'(x) = e^x \end{cases}$$

En divisant toutes nos expressions par e^x ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \cos(x) C_1'(x) + \sin(x) C_2'(x) = 0 & (1.44.1) \\ \left(\cos(x) - \sin(x)\right) C_1'(x) + (\sin(x) + \cos(x))) C_2'(x) = 1. & (1.44.2) \end{cases}$$

Ainsi en soustrayant la première équation à la deuxième, on arrive à

$$(1.44.2) - (1.44.1) : \qquad -C_1'(x) \sin(x) + C_2'(x) \cos(x) = 1. \tag{1.44.3}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \cos(x) \cdot (1.44.1) - \sin(x) \cdot (1.44.3) : \qquad & \cos^2(x) C_1'(x) + \sin^2(x) C_1'(x) = -\sin(x) \\ \sin(x) \cdot (1.44.1) + \cos(x) \cdot (1.44.3) : \qquad & \sin^2(x) C_2'(x) + \cos^2(x) C_2'(x) = \cos(x), \end{aligned}$$

dont on déduit finalement, en utilisant que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$,

$$\begin{aligned} C_1'(x) =& -\sin(x) \\ C_2'(x) =& \cos(x) \end{aligned}$$

Notez ici que le système était un peu plus fastidieux à résoudre. En utilisant la formule avec le wronskien, on arrive directement à

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) =& e^x \cos(x) \left(e^x \cos(x) - e^x \sin(x)\right) + \left(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)\right) e^x \sin(x) \\ =& e^{2x} \cos^2(x) + e^{2x} \sin^2(x) = e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1'(x) =& -\frac{y_2(x) q(x)}{a W[y_1, y_2](x)} = -\frac{e^x \sin(x) e^x}{e^{2x}} = -\sin(x) \\ C_2'(x) =& \frac{y_1(x) q(x)}{a W[y_1, y_2](x)} = \frac{e^x \cos(x) e^x}{e^{2x}} = \cos(x). \end{aligned}$$

On arrive donc à

$$\begin{aligned}
C_1(x) =& \cos(x) + K_1 \\
C_2(x) =& \sin(x) + K_2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
y_p(x) =& C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \\
=& \cos(x)e^x \cos(x) + \sin(x)e^x \sin(x) + K_1e^x \cos(x) + K_2e^x \sin(x) \\
=& e^x + K_1e^x \cos(x) + K_2e^x \sin(x).
\end{aligned}$$

À nouveau, vu qu'on a gardé les constantes K_1 et K_2 dans $C_1(x)$ et $C_2(x)$, on récupère ainsi la solution générale.

Méthode 1.45 (Polynôme caractéristique + Coefficients indéterminés, cas où q ne ressemble ni à y_1 ni à y_2)**.**
Soit une EDO linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = q(x)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $q(x)$ ait une des formes suivantes :

$$q(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + ... + \xi_n x^n \qquad (\xi_i \in \mathbb{R},\ c \neq 0)$$

$$\begin{aligned}
q(x) =& \xi_0 \sin(\mu x) + \xi_1 x \sin(\mu x) \\
&+ ... + \xi_n x^n \sin(\mu x) \\
&+ \eta_0 \cos(\mu x) + \eta_1 x \cos(\mu x) \\
&+ ... + \eta_n x^n \cos(\mu x) \qquad (\xi_i, \eta_i, \mu \in \mathbb{R},\ a(i\mu)^2 + bi\mu + c \neq 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x) =& \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x} \\
&+ ... + \xi_n x^n e^{\lambda x} \qquad (\xi_i, \lambda \in \mathbb{R},\ a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x) =& \xi_0 \sin(\mu x)e^{\lambda x} + \xi_1 x \sin(\mu x e^{\lambda x}) \\
&+ ... + \xi_n x^n \sin(\mu x)e^{\lambda x} \\
&+ \eta_0 \cos(\mu x)e^{\lambda x} + \eta_1 x \cos(\mu x)e^{\lambda x} \qquad (\xi_i, \eta_i, \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}^*, \\
&+ ... + \eta_n x^n \cos(\mu x)e^{\lambda x} \qquad a(\lambda + i\mu)^2 + b(\lambda + i\mu) + c \neq 0)
\end{aligned}$$

Étape 1 : On trouve deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène à l'aide du polynôme caractéristie.
Soit $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. En fonction des racines, on trouve y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (voir remarque 1.38, page 24).
Étape 2 : On trouve une solution particulière de l'équation avec la méthode des coefficients indéterminés.

On pose y_p une fonction qui a la même forme que $q(x)$:

$$y_p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n \qquad (\alpha_i \in \mathbb{R},\ c \neq 0)$$

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \alpha_0 \sin(\mu x) + \alpha_1 x \sin(\mu x) \\ &+ ... + \alpha_n x^n \sin(\mu x) \\ &+ \beta_0 \cos(\mu x) + \beta_1 x \cos(\mu x) \\ &+ ... + \beta_n x^n \cos(\mu x) \qquad (\alpha_i, \beta_i, \mu \in \mathbb{R}, a(i\mu)^2 + bi\mu + c \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \alpha_0 e^{\lambda x} + \alpha_1 x e^{\lambda x} \\ &+ ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x} \qquad (\alpha_i, \lambda \in \mathbb{R},\ a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \alpha_0 \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \alpha_1 x \sin(\mu x e^{\lambda x}) \\ &+ ... + \alpha_n x^n \sin(\mu x) e^{\lambda x} \\ &+ \beta_0 \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \beta_1 x \cos(\mu x) e^{\lambda x} \qquad (\alpha_i, \beta_i, \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}^* \\ &+ ... + \beta_n x^n \cos(\mu x) e^{\lambda x} \qquad a(\lambda + i\mu)^2 + b(\lambda + i\mu) + c \neq 0) \end{aligned}$$

Et on injecte ceci dans l'équation $ay_p''(x) + by_p'(x) + cy_p(x) = q(x)$. On cherche ensuite les α_i et les β_i pour que y_p soit une solution de l'équation.
On construit finalement la solution générale en posant $y = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Exemple 1.46.
On reprend les mêmes exemples que ci-dessus :

(i) Soit l'EDO $y'' + y' - 2y = 3 - 2x^2$.
Étape 1 : Polynôme caractéristique.
Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$, dont les racines sont -2 et 1. Ainsi, on a deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène en considérant

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^x \\ y_2(x) =& e^{-2x}. \end{aligned}$$

Étape 2 : Coefficients indéterminés.
Pour choisir la forme de y_p, on choisit une ligne des différentes formes de q données dans la méthode 1.45, page 30 et on choisit n. Ici, on prend la première ligne et $n = 2$:

$$q(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2$$

avec $\xi_0 = 3$, $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = -2$.
On cherche donc y_p de la forme

$$y_p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} y_p'(x) =& \alpha_1 + 2\alpha_2 x \\ y_p''(x) =& 2\alpha_2. \end{aligned}$$

Et donc, pour que y_p soit une solution de l'équation, on a besoin de

$$\begin{aligned} q(x) =& 3 - 2x^2 = y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) \\ =& \alpha_2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 x - 2(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) \\ =& (2\alpha_2 + \alpha_1 - 2\alpha_0) + (2\alpha_2 - 2\alpha_1)x + -2\alpha_2 x^2. \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on arrive à

$$\begin{cases} -2\alpha_2 = -2 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_1 - 2\alpha_0 = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1.$$

Et donc, $y_p(x) = x + x^2$ et donc la solution générale de l'EDO est

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = x + x^2 + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

(*ii*) Soit l'EDO $y'' - 2y' + 2y = e^x$.
Étape 1 : Polynôme caractéristique pour les solutions de l'équation homogène.
Le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

dont les racines sont

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Ainsi, les deux solutions linéairement indépendantes sont

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^{\mathrm{Re}(1+i)x} \cos(\mathrm{Im}(1+i)x) = e^x \cos(x) \\ y_2(x) =& e^{\mathrm{Re}(1+i)x} \sin(\mathrm{Im}(1+i)x) = e^x \sin(x). \end{aligned}$$

Étape 2 : Coefficients indéterminés.
Ici q a la forme donnée à la troisième ligne de la méthode 1.45, page 30, avec $n = 0$:

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x},$$

avec $\xi_0 = 1$ et $\lambda = 1$. On cherche donc y_p de la forme

$$y_p(x) = \alpha_0 e^x.$$

On a alors,

$$y_p''(x) = y_p'(x) = y_p(x) = \alpha_0 e^x.$$

Et donc, pour que y_p soit une solution de l'équation, on a besoin

$$\begin{aligned} q(x) =& e^x = y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y_p(x) \\ =& \alpha_0 e^x - 2\alpha_0 e^x + 2\alpha_0 e^x = \alpha_0 e^x. \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on trouve $\alpha_0 = 1$ et donc $y_p(x) = e^x$ est une solution particulière de l'équation.
On conclut que la solution générale est

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^x + C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x).$$

(*iii*) Soit l'EDO $y'' + y' - 2y = xe^x$.

Étape 1 : Polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$, dont les racines sont -2 et 1. Ainsi, on a deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène en considérant

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^x \\ y_2(x) =& e^{-2x}. \end{aligned}$$

Étape 2 : Coefficients indéterminés.

Ici q a la forme donnée à la troisième ligne de la méthode 1.45, page 30, avec $n = 1$:

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x}$$

avec $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$ et $\lambda = 1$. On cherche donc y_p de la forme

$$y_p(x) = \alpha_0 e^x + \alpha_1 x e^x.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} y_p'(x) =& \alpha_0 e^x + \alpha_1 e^x + \alpha_1 x e^x = (\alpha_0 + \alpha_1) e^x + \alpha_1 x e^x \\ y_p''(x) =& (\alpha_0 + \alpha_1) e^x + \alpha_1 e^x + \alpha_1 x e^x = (\alpha_0 + 2\alpha_1) e^x + \alpha_1 x e^x. \end{aligned}$$

Et donc, pour que y_p soit une solution de l'équations, on a besoin

$$\begin{aligned} q(x) =& xe^x = y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) \\ =& \left((\alpha_0 + 2\alpha_1)e^x + \alpha_1 x e^x\right) + \left((\alpha_0 + \alpha_1)e^x + \alpha_1 x e^x\right) - 2\left(\alpha_0 e^x + \alpha_1 x e^x\right) \\ =& 3\alpha_1 e^x. \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on doit avoir

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 3\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution.

Comme dans la méthode des coefficients indéterminés pour les EDOs d'ordre 1, ici, on doit d'abord modifier la combinaison linéaire avec laquelle on part pour y_p. Le problème vient du fait qu'on a $\lambda = 1$ et $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse dans la marge des différentes formes de $q(x)$ données dans la méthode 1.45, page 30.

Méthode 1.47 (Polynôme caractéristique + Coefficients indéterminés, cas où q ne ressemble à y_1 ou y_2)**.**
Soit une EDO linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = q(x)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
Étape 1 : Polynôme caractéristique.
Comme dans la méthode 1.45, page 30.
Étape 2 : Coefficients indéterminés.
On distingue 3 cas :
Cas 1 : $b^2 - 4ac > 0$, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c = 0$.

Supposons que q est de la forme

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x} + ... + \xi_n x^n e^{\lambda x} \qquad (\xi_i \in \mathbb{R},\ \lambda = \lambda_1 \text{ ou } \lambda_2)$$

Alors, il faut d'abord modifier la combinaison linéaire avant de poser y_p :

$$\alpha_0 \underbrace{e^{\lambda x}}_{=y_1 \text{ ou } y_2} + \alpha_1 x e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{\alpha_0 e^{\lambda x}} + \alpha_1 x e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}$$
$$\downarrow$$
$$\alpha_1 x e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}.$$

On choisit donc
$$y_p(x) = \alpha_1 x e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}$$
qu'on injecte dans l'équation et on trouve les α_i pour que y_p soit une solution de l'équation.
Pour finir, on conclut que $y = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2$ est la solution générale de l'équation.
Cas 2 : $b^2 - 4ac = 0$, $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2 = x e^{\lambda x}$ avec $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Supposons que q est de la forme

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x} + ... + \xi_n x^n e^{\lambda x} \qquad (\xi_i \in \mathbb{R})$$

Alors, il faut d'abord modifier la combinaison linéaire avant de poser y_p :

$$\alpha_0 \underbrace{e^{-\lambda x}}_{=y_1} + \alpha_1 \underbrace{x e^{\lambda x}}_{=y_2} + \alpha_2 x^2 e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x}$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{\alpha_0 e^{\lambda x}} + \cancel{\alpha_1 x e^{\lambda x}} + \alpha_2 x^2 e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x} + \alpha_{n+2} x^{n+2} e^{\lambda x}$$
$$\downarrow$$
$$\alpha_2 x^2 e^{\lambda x} + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x} + \alpha_{n+2} x^{n+2} e^{\lambda x}.$$

On choisit donc
$$y_p(x) = \alpha_2 x^2 e^{\lambda x} + ... + \alpha_{n+2} x^{n+2} e^{\lambda x}$$
qu'on injecte dans l'équation et on trouve les α_i pour que y_p soit une solution de l'équation.
Pour finir, on conclut que $y = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2$ est la solution générale de l'équation.
Cas 3 : $b^2 - 4ac < 0$, $y_1 = e^{\lambda x}\sin(\mu x)$, $y_2 = e^{\lambda x}\cos(\mu x)$, avec $\mu \neq 0$ et $a(\lambda \pm i\mu)^2 + b(\lambda + i\mu) + c = 0$.
Supposons que q est de la forme

$$\begin{aligned} q(x) =& \xi_1 e^{\lambda x}\sin(\mu x) + ... + \xi_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x) \\ &+ \eta_1 e^{\lambda x}\cos(\mu x) + ... + \eta_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x) \qquad (\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Alors, il faut d'abord modifier la combinaison linéaire avant de poser y_p :

$$\alpha_1 \underbrace{e^{\lambda x}\sin(\mu x)}_{=y_1} + \alpha_1 x e^{\lambda x}\sin(\mu x) + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x) +$$
$$+\beta_1 \underbrace{e^{\lambda x}\cos(\mu x)}_{=y_2} + \beta_1 x e^{\lambda x}\cos(\mu x) + ... + \beta_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x)$$
$$\downarrow$$
$$\cancel{\alpha_1 e^{\lambda x}\sin(\mu x)} + \alpha_1 x e^{\lambda x}\sin(\mu x) + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x) + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}\sin(\mu x)$$
$$+\cancel{\beta_1 e^{\lambda x}\cos(\mu x)} + \beta_1 x e^{\lambda x}\cos(\mu x) + ... + \beta_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x) + \beta_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}\cos(\mu x)$$
$$\downarrow$$
$$\alpha_1 x e^{\lambda x}\sin(\mu x) + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x}\sin(\mu x) + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}\sin(\mu x)$$
$$+\beta_1 x e^{\lambda x}\cos(\mu x) + ... + \beta_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x) + \beta_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}\cos(\mu x)$$

On choisit donc

$$\begin{aligned} y_p(x) =& \alpha_1 x e^{\lambda x}\sin(\mu x) + ... + \alpha_n x^n e^{\lambda x}\sin(\mu x) + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}\sin(\mu x) \\ &+ \beta_1 x e^{\lambda x}\cos(\mu x) + ... + \beta_n x^n e^{\lambda x}\cos(\mu x) + \beta_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}\cos(\mu x) \end{aligned}$$

qu'on injecte dans l'équation et on trouve les α_i et β_i pour que y_p soit une solution de l'équation.
Pour finir, on conclut que $y = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2$ est la solution générale de l'équation.

Remarque 1.48. (i) Remarquons que dans le cas 1 ci-dessus, $\lambda = 0$ est possible (quand $c = 0$, $\lambda = 0$ est une racine du polynôme carctéristique) et donc, ce cas englobe aussi la situation où $q(x)$ a la forme

$$q(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + ... + \xi_n x^n.$$

(également dans le cas 2, mais pour que 0 soit une racine double, l'équation est de la forme $ay'' = q(x)$ qu'on peut résoudre par intégration directe)
De plus, dans le cas 3 ci-dessus, $\lambda = 0$ est possible et donc, ce cas englobe aussi la situation où $q(x)$ a la forme

$$\begin{aligned} q(x) =& \xi_0 \sin(\mu x) + \xi_1 x \sin(\mu x) + ... + \xi_n x^n \sin(\mu x) \\ &+ \eta_0 \cos(\mu x) + \eta_1 x \cos(\mu x) + ... + \eta_n x^n \cos(\mu x) \end{aligned}$$

(ii) Pour savoir si on doit appliquer la méthode 1.45, page 30 ou la méthode 1.47, page 33, plutôt que de vérifier les hypothèses données en marge des différentes formes de $q(x)$ dans la méthode 1.45, on regarde si une constante fois y_1 ou y_2 est un terme de la combinaison linéaire de base qu'on choisit pour y_p dans la méthode 1.45. On supprime alors toutes les occurences de y_1 ou y_2 et on ajoute autant de termes que ce qu'on a supprimé en incrémentant la puissance de x.

Exemple 1.49.
Soit l'EDO $y'' + y' - 2y = xe^x$.
Étape 1 : Polynôme caractéristique.
Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$, dont les racines sont -2 et 1. Ainsi, on a deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène en considérant

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^x \\ y_2(x) =& e^{-2x}. \end{aligned}$$

Étape 2 : Coefficients indéterminés.
Ici q a la forme donnée à la troisième ligne de la méthode 1.45, page 30, avec $n = 1$:

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x}$$

avec $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$ et $\lambda = 1$. Remarquons que y_1 apparait dans la combinaison linéaire de $q(x)$. On commence donc par faire la transformation de la méthode 1.47, page 33 :

$$\begin{gathered}\alpha_0 \underbrace{e^x}_{=y_1} + \alpha_1 x e^x \\ \downarrow \\ \cancel{\alpha_0 e^x} + \alpha_1 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x \\ \downarrow \\ \alpha_1 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x.\end{gathered}$$

On pose donc

$$y_p(x) = \alpha_1 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x.$$

Alors,

$$\begin{aligned}y_p'(x) =& \alpha_1 e^x + \alpha_1 x e^x + 2\alpha_2 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x = \alpha_1 e^x + (\alpha_1 + 2\alpha_2) x e^x + \alpha_2 x^2 e^x \\ y_p''(x) =& \alpha_1 e^x + (\alpha_1 + 2\alpha_2) e^x + (\alpha_1 + 2\alpha_2) x e^x + 2\alpha_2 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x \\ =& (2\alpha_1 + 2\alpha_2) e^x + (\alpha_1 + 4\alpha_2) x e^x + \alpha_2 x^2 e^x\end{aligned}$$

Donc, pour que y_p soit solution de l'EDO, on doit avoir que

$$\begin{aligned}q(x) =& x e^x = y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) \\ &= \Big((2\alpha_1 + 2\alpha_2) e^x + (\alpha_1 + 4\alpha_2) x e^x + \alpha_2 x^2 e^x\Big) \\ &\quad + \Big(\alpha_1 e^x + (\alpha_1 + 2\alpha_2) x e^x + \alpha_2 x^2 e^x\Big) \\ &\quad - 2\Big(\alpha_1 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x\Big) \\ &= (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_1)\, e^x \\ &\quad + (\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_1)\, x e^x \\ &\quad + (\alpha_2 + \alpha_2 - 2\alpha_2)\, x^2 e^x \\ &= (3\alpha_1 + 2\alpha_2)\, e^x + 6\alpha_2 x e^x\end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on déduit

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_2 = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{6},\ \alpha_1 = -\frac{1}{9}$$

Et donc, $y_p(x) = -\frac{1}{9} x e^x + \frac{1}{6} x^2 e^x$ est une solution particulière de l'équation. Pour finir,

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = -\frac{1}{9} x e^x + \frac{1}{6} x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

est la solution générale de l'EDO.

Proposition 1.50 (Principe de superposition)**.**
Soit l'EDO linéaire du deuxipme ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = q_1(x) + q_2(x),$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b, c \in \mathbb{R}$.
Si y_1 *est une solution de* $ay_1'' + by_1' + cy_1 = q_1(x)$ *et* y_2 *est une solution de* $ay_2'' + by_2' + cy_2 = q_2(x)$*, alors,* $y = y_1 + y_2$ *est une solution de*

$$ay'' + by' + cy = q_1(x) + q_2(x).$$

Pour la démonstration, voir page 98.

Exemple 1.51. (*i*) Soit l'EDO $\frac{1}{2}y'' + 2y = x\sin(x) + \cos(2x)$.

Étape 1 : Polynôme caractéristique.
Le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + 2 = \frac{1}{2}(\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$, dont les racines sont $-2i$ et $+2i$. Ainsi, on choisit les deux solution linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$\begin{aligned} y_1(x) =& \sin(2x) \\ y_2(x) =& \cos(2x). \end{aligned}$$

Étape 2 : Coefficients indéterminés.
On a $q(x) = x\sin(x) + \cos(2x)$, qui a deux partie de nature différente : $x\sin(x)$ et $\cos(2x)$. On sépare donc le problème en 2 et on résout séparément

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y_{p,1}'' + 2y_{p,1} =& q_1(x) := x\sin(x) \\ \frac{1}{2}y_{p,2}''(x) + 2y_{p,2} =& q_2(x) := \cos(2x). \end{aligned}$$

Commençons par la première partie. La forme générale de q_1 est

$$q_1(x) = \xi_0 \sin(x) + \xi_1 x\sin(x) + \eta_0\cos(x) + \eta_1 x\cos(x)$$

Vu que y_1 et y_2 n'apparaissent pas dans la combinaison linéaire, on choisit directement

$$y_{p,1}(x) = \alpha_0\sin(x) + \alpha_1 x\sin(x) + \beta_0\cos(x) + \beta_1 x\cos(x).$$

On a alors

$$\begin{aligned} y_{p,1}'(x) =& \alpha_0\cos(x) + \alpha_1\sin(x) + \alpha_1 x\cos(x) - \beta_0\sin(x) + \beta_1\cos(x) - \beta_1 x\sin(x) \\ =& (\alpha_1 - \beta_0)\sin(x) - \beta_1 x\sin(x) + (\alpha_0 + \beta_1)\cos(x) + \alpha_1 x\cos(x) \\ y_{p,1}''(x) =& (\alpha_1 - \beta_0)\cos(x) - \beta_1\sin(x) - \beta_1 x\cos(x) \\ & - (\alpha_0 + \beta_1)\sin(x) + \alpha_1\cos(x) - \alpha_1 x\sin(x) \\ =& (-\alpha_0 - 2\beta_1)\sin(x) - \alpha_1 x\sin(x) + (2\alpha_1 - \beta_0)\cos(x) - \beta_1 x\cos(x). \end{aligned}$$

Et donc, pour que $y_{p,1}$ soit une solution de l'EDO, on doit avoir

$$\begin{aligned} q_1(x) =& x\sin(x) = \frac{1}{2}y_{p,1}''(x) + 2y_{p,1}(x) \\ =& \frac{1}{2}\left((-\alpha_0 - 2\beta_1)\sin(x) - \alpha_1 x\sin(x) + (2\alpha_1 - \beta_0)\cos(x) - \beta_1 x\cos(x)\right) \\ & + 2\left(\alpha_0\sin(x) + \alpha_1 x\sin(x) + \beta_0\cos(x) + \beta_1 x\cos(x)\right) \\ =& \left(\frac{3}{2}\alpha_0 - \beta_1\right)\sin(x) + \frac{3}{2}\alpha_1 x\sin(x) + \left(\alpha_1 + \frac{3}{2}\beta_0\right)\cos(x) + \frac{3}{2}\beta_1 x\cos(x). \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on obtient

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\alpha_0 - \beta_1 = 0 \\ \\ \frac{3}{2}\alpha_1 = 1 \\ \\ \alpha_1 + \frac{3}{2}\beta_0 = 0 \\ \\ \frac{3}{2}\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = \frac{2}{3},\ \beta_0 = -\frac{4}{9},\ \beta_1 = 0$$

et donc

$$y_{p,1}(x) = \frac{2}{3}x\sin(x) - \frac{4}{9}\cos(x).$$

Passons à la deuxième équation. La forme générale de q_2 est

$$q_2(x) = \xi_0 \sin(2x) + \eta_0 \cos(2x).$$

Vu que y_1 et y_2 apparaissent, on doit d'abord transformer la combinaison linéaire :

$$\begin{gathered} \alpha_0 \underbrace{\sin(2x)}_{=y_1} + \beta_0 \underbrace{\cos(2x)}_{=y_2} \\ \downarrow \\ \cancel{\alpha_0 \sin(2x)} + \alpha_1 x \sin(2x) + \cancel{\beta_0 \cos(2x)} + \beta_1 x \cos(2x) \\ \downarrow \\ \alpha_1 x \sin(2x) + \beta_1 x \cos(2x) \end{gathered}$$

On choisit donc

$$y_{p,2}(x) = \alpha_1 x \sin(2x) + \beta_1 x \cos(2x).$$

On a alors

$$\begin{aligned} y'_{p,2}(x) =& \alpha_1 \sin(2x) + 2\alpha_1 x \cos(2x) + \beta_1 \cos(2x) - 2\beta_1 x \sin(2x) \\ y''_{p,2}(x) =& 2\alpha_1 \cos(2x) + 2\alpha_1 \cos(2x) - 4\alpha_1 x \sin(2x) \\ & - 2\beta_1 \sin(2x) - 2\beta_1 \sin(2x) - 4\beta_1 x \cos(2x) \\ =& - 4\beta_1 \sin(2x) - 4\alpha_1 x \sin(2x) + 4\alpha_1 \cos(2x) - 4\beta_1 x \cos(2x) \end{aligned}$$

Et donc, pour que $y_{p,2}$ soit une solution de l'EDO, on doit avoir

$$\begin{aligned} q_2(x) = \cos(2x) = & \frac{1}{2} y''_{p,2}(x) + 2y_{p,2}(x) \\ =& \frac{1}{2}\left(-4\beta_1 \sin(2x) - 4\alpha_1 x \sin(2x) + 4\alpha_1 \cos(2x) - 4\beta_1 x \cos(2x)\right) \\ & + 2\left(\alpha_1 x \sin(2x) + \beta_1 x \cos(2x)\right) \\ =& - 2\beta_1 \sin(2x) + 2\alpha_1 \cos(2x) \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on obtient

$$\begin{cases} -2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2},\ \beta_1 = 0.$$

On conclut que

$$y_{p,2}(x) = \frac{1}{2} x \sin(2x).$$

Pour finir, la solution générale de l'EDO est

$$\begin{aligned} y(x) =& y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ =& \frac{2}{3} x \sin(x) - \frac{4}{9} \cos(x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x). \end{aligned}$$

1.5 Équivalence entre équation d'ordre quelconque et système d'équations du premier ordre, théorème d'existence et résumé

Remarque 1.52 (Équivalence entre équation d'ordre quelconque et système du premier ordre)**.**
Remarquons que trouver une solution $y\colon I \to \mathbb{R}$ de l'équation

$$ay'' + by' + cy = q \tag{1.52.1}$$

est équivalent à trouver une solution $u = (u_1, u_2)\colon I \to \mathbb{R}^2$ du système

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ \\ u_2' = \frac{1}{a} \left(q - bu_2 - cu_1 \right), \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + Q \tag{1.52.2}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{q}{a} \end{pmatrix}.$$

En effet, si y est une solution de (1.52.1), en posant $u = (u_1, u_2) := (y, y')$, on a

$$\begin{aligned} u_1' =& y' = u_2 \\ u_2' =& (y')' = y'' \overset{(1.52.1)}{=} \frac{1}{a} \left(q - by' - cy \right) = \frac{1}{a} \left(q - bu_2 - cu_1 \right) \end{aligned}$$

et donc u est une solution de (1.52.2).
Inversément, si $u = (u_1, u_2)\colon I \to \mathbb{R}^2$ est une solution de (1.52.2), posant $y := u_1$, on a $y' = u_1' = u_2$, donc $u_2' = y''$ et

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy =& au_2' + bu_2 + cu_1 \\ \overset{(1.52.2)}{=}& a \frac{1}{a} \left(q - bu_2 - cu_1 \right) + bu_2 + cu_1 = q, \end{aligned}$$

et donc y est une solution de (1.52.1).
Plus généralement, une équation différentielle d'ordre n est toujours équivalente à un système d'ordre 1 à n équations :

$$E(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_1' - u_2 &= 0 \\ u_2' - u_3 &= 0 \\ & \vdots \\ u_{n-1}' - u_n &= 0 \\ E(x, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n, u_n') &= 0 \end{cases}$$

Théorème 1.53 (Théorème d'existence et unicité locale de Picard)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert, borné, non-vide et une fonction continue*

$$\begin{aligned} f\colon I \times \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ (t,y) &\mapsto f(t,y) \end{aligned}$$

tel que f *est* locallement Lipschitzienne *en* y *: Pour tout sous ensemble fermé, borné* $K \subset \Omega$ *et intervalle fermé borné* $J \subset I$*, il existe une constante* $\gamma = \gamma(J,K)$ *telle que pour tout* $t \in J$*,* $y_1, y_2 \in K$*,*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq \gamma\, |y_1 - y_2| \,.$$

Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$*,*
Existence *: il existe un intervalle fermé borné* $I_0 \subset I$ *tel que* $t_0 \in \operatorname{int} I_0$ *et* $y \in C^1(I_0, \mathbb{R}^n)$ *tels que*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Unicité *: de plus, si il existe* $J \subset I$ *un intervalle fermé et* $\tilde{y} \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ *tels que* $t_0 \in \operatorname{int} J$ *et*

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t)) & \forall t \in J \\ \tilde{y}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

alors, pour tout $t \in I_0 \cap J$*,* $y(t) = \tilde{y}(t)$*.*

Pour la démonstration, voir page 98.

Remarque 1.54 (Résumé des méthodes)**.**
On regroupe les méthodes vues dans ce chapitre et leur caractéristiques. Notez que pas toutes les EDOs du monde peuvent se résoudre avec une de ces méthodes.

(i) EDOs d'ordre 1

Méthode	Forme de l'équation	Remarque
Séparation des variables (1.12, 1.13)	$g(x) - f(y)y' = 0$	méthode surtout utilisée quand aucune autre fonctionne.
Facteur intégrant (1.21)	$y' + p(x)y = q(x)$	L'équation doit être linéaire.
Séparation des variables sur l'équation homogène et variation de la constante (1.18)	$y' + p(x)y = q(x)$	L'équation doit être linéaire.
Séparation des variables sur l'équation homogène et coefficients indéterminés (1.26, 1.28)	$y' + ay = q(x)$	L'équation doit être linéaire et à coefficients constants. De plus $q(x)$ doit avoir une des formes décrites dans la méthode 1.26, page 14. Attention à adapter si besoin en utilisant la méthode 1.28, page 17.

(ii) EDOs d'ordre 2

Méthode	Forme de l'équation	Remarque
Polynôme caractéristique sur l'équation homogène et variation de la constante (1.39)	$ay'' + by' + cy = q(x)$	L'équation doit être linéaire à coefficients constants.
Polynôme caractéristique sur l'équation homogène et coefficients indéterminés (1.45, 1.47)	$ay'' + by' + cy = q(x)$	L'équation doit être linéaire à coefficients constants. De plus $q(x)$ doit avoir une des formes décrites dans la méthode 1.45, page 30. Attention à adapter si besoin en utilisant la méthode 1.47, page 33.

Chapitre 2

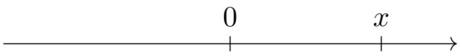
L'espace $\mathbb{R}^n$

2.1 Rappels et topologie

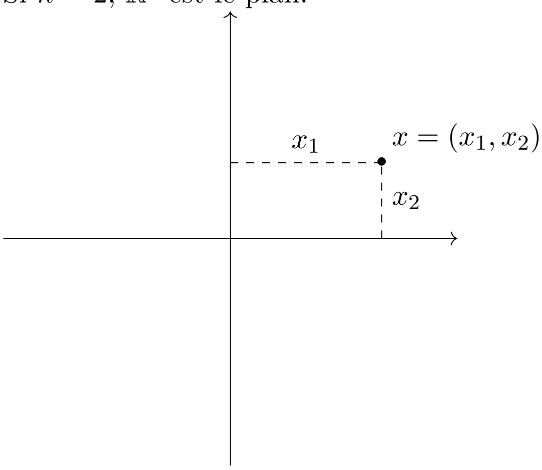
Rappel 2.1 ($\mathbb{R}^n$ et sa structure)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}.$$

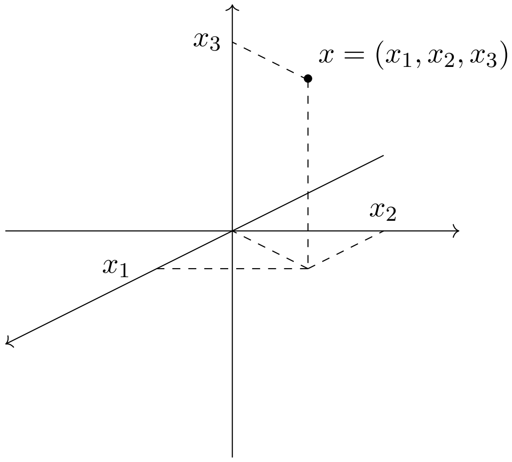
On écrit de manière générale pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Si $n = 1$, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ est la droite réelle.



On écrit simplement x pour un élément de $\mathbb{R}$ comme en analyse I.
Si $n = 2$, $\mathbb{R}^2$ est le plan.



On écrit généralement (x, y) pour un élément générique de $\mathbb{R}^2$ à la place de $x = (x_1, x_2)$.
Attention de ne pas écrire $x = (x, y)$.
Si $n = 3$, $\mathbb{R}^3$ est l'espace.



On écrit généralement (x, y, z) pour un élément générique de $\mathbb{R}^3$ à la place de $x = (x_1, x_2, x_3)$. Attention de ne pas écrire $x = (x, y, z)$.
Dans cet ouvrage, un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$, noté x est par convention un vecteur ligne :

$$x = (x_1, ..., x_n).$$

Dans le cas où on veut les écrire sous forme de vecteur colonne (si on veut par exemple multiplier le vecteur par une matrice carrée à gauche), on utilise la notation pour la *transposée* :

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
Addition :

$$\begin{aligned} \bullet + \bullet \quad &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ &(x, y) \mapsto x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \end{aligned}$$

Multiplication scalaire :

$$\begin{aligned} \bullet \cdot \bullet \quad &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ &(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n). \end{aligned}$$

Produit scalaire, norme et distance :
Produit scalaire euclidien :

$$\begin{aligned} \langle \bullet, \bullet \rangle \quad &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + ... + x_n y_n. \end{aligned}$$

Norme euclidienne :

$$\begin{aligned} \|\bullet\| \quad &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \\ &x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{aligned}$$

Distance euclidienne :

$$\begin{aligned} d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.
Propriétés du produit scalaire :

(i) (Définie positive) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ *avec égalité si et seulement si* $x=0$.

(ii) (Symétrie) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

(iii) (Bilinéarité) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

Propriétés de la norme :

(iv) (Positivité) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq 0$ *avec égalité si et seulement si* $x=0$.

(v) (Homogénéité absolue) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

(vi) (Inégalité du triangle) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(vii) (Inégalité du triangle inverse) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

(viii) (Identité du parallélogramme) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Propriétés de la distance :

(ix) (Positivité) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) \geq 0$ *avec égalité si et seulement si* $x=y$.

(x) (Symétrie) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = d(y,x)$.

(xi) (Inégalité du triangle) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(xii) (Inégalité du triangle inverse) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$, $d(x,z) \geq |d(x,y) - d(y,z)|$.

Propriétés supplémentaires :

(xiii) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

(xiv) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, $|x_i| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

Pour la démonstration, voir page 99.

Définition 2.3 (Boule).
Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On définit

(i) la *boule (ouverte) centrée en a de rayon r* par

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x,a) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x-a\| < r\} \\ &= \left\{x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n}|x_i - a_i| < r^2\right\} \end{aligned}$$

(ii) la *boule fermée centrée en a de rayon r* par

$$\begin{aligned} \overline{B}(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(x,a) \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x-a\| \leq r\} \\ &= \left\{x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n}|x_i - a_i| \leq r^2\right\} \end{aligned}$$

Définition 2.4 (Ouvert, fermé)**.**
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que

(i) E est *ouvert* si $\forall x \in E$, $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E$

(ii) E est *fermé* si $\mathbb{R}^n \backslash E$ est ouvert.

Remarque 2.5. (i) Si $n = 1$, la définition ci-dessus coïncide avec la définition d'ensemble ouvert vue en analyse I.

(ii) Si un ensemble n'est pas ouvert, ceci n'implique pas que l'ensemble est fermé et vice-versa. De plus, si un ensemble est ouvert, ceci n'implique pas que l'ensemble n'est pas fermé.

En effet, il existe des ensembles à la fois ouverts et fermés ($\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont les seuls) et des ensembles ni ouverts ni fermés (il en existe beaucoup !).

Exemple 2.6. (i) Les boules ouvertes sont ouvertes :

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ quelconques et $E = B(a,R)$. Montrons que E est ouvert.

Soit $x \in E$ quelconque. Par hypothèse, ceci implique que $d(x,a) < R$. Posons $r = R - d(x,a) > 0$ et montrons que $B(x,r) \subset B(a,R) = E$.

Soit donc $y \in B(x,r)$ quelconque. C'est-à-dire, $d(x,y) < r$. Montrons que $y \in B(a,R)$, c'est-à-dire $d(a,y) < R$. On a, par l'inégalité du triangle pour la distance,

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r = d(a,x) + R - d(a,x) = R.$$

Vu que y est quelconque, on a le résultat.

(ii) Les boules fermées sont fermées :

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ quelconques et $E = \overline{B}(a,r)$. Alors,

$$\mathbb{R}^n \backslash E = \mathbb{R}^n \backslash \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(a,x) \leq R\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(a,x) > R\}.$$

Montrons que $F := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ d(a,x) > R\}$ est ouvert.

Soit donc $x \in F$ quelconque. On a alors par définition $d(a,x) > R$. Posons $r = d(a,x) - R > 0$ et montrons que $B(x,r) \subset F$. Soit donc $y \in B(x,r)$ quelconque (c'est-à-dire, $d(x,y) < r$) et montrons que $y \in F$ (c'est-à-dire $d(y,a) > R$). On a, par l'inégalité du triangle inverse pour la distance,

$$\begin{aligned} d(y,a) &\geq |d(x,y) - d(a,x)| \geq d(a,x) - \underbrace{d(x,y)}_{<r} \\ &> d(a,x) - r = d(a,x) - (d(a,x) - R) = R. \end{aligned}$$

(iii) L'ensemble $E = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_2 < 1\}$ est ouvert

Soit $a = (a_1, a_2) \in E$ quelconque. On a alors par définition $a_2 < 1$. Posons $r = 1 - a_2 > 0$, et montrons que $B(a,r) \subset E$. Soit donc $x = (x_1, x_2) \in B(a,r)$ quelconque (c'est-à-dire, $\|a - x\| < r$). Montrons que $x \in E$ (c'est-à-dire $x_2 < 1$).

On a, en utilisant que $|x_2 - a_2| \leq \|x - a| = d(x,a)$,

$$x_2 = a_2 + x_2 - a_2 \leq a_2 + |x_2 - a_2| \leq a_2 + d(x,a) < a_2 + r = a_2 + 1 - a_2 = 1,$$

ce qui montre que $x \in E$. x étant quelconque, on a bien $B(a,r) \subset E$ et a étant quelconque, on a que E est ouvert.

(*iv*) Soit l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -1 \leq x_1 < 1\}$. Alors, E n'est ni ouvert ni fermé. Commençons par montrer que E n'est pas ouvert. La négation de ouvert est

$$\begin{aligned}
&\neg\,(\forall a \in E,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(a,r) \subset E)\\
&\exists a \in E \text{ tel que } \neg\,(\exists r > 0 \text{ tel que } B(a,r) \subset E)\\
&\exists a \in E \text{ tel que } \forall r > 0,\ \neg\,(B(a,r) \subset E)\\
&\exists a \in E \text{ tel que } \forall r > 0,\ \neg\,(\forall x \in B(a,r) \text{ on a } x \in E)\\
&\exists a \in E \text{ tel que } \forall r > 0,\ \exists x \in B(a,r) \text{ tel que } \neg\,(x \in E)\\
&\exists a \in E \text{ tel que } \forall r > 0,\ \exists x \in B(a,r) \text{ tel que } x \notin E\\
&\exists a \in E \text{ tel que } \forall r > 0,\ \exists x \in B(a,r) \text{ tel que } \neg\,(-1 \leq x_1 < 1)\\
&\exists a \in E \text{ tel que } \forall r > 0,\ \exists x \in B(a,r) \text{ tel que } x_1 < -1 \text{ ou } x_1 \geq 1.
\end{aligned}$$

Soit $a = (-1, 0)$. Alors, $a \in E$, vu que $a_1 = 1$ vérifie $-1 \leq a_1 < 1$. Soit $r > 0$ quelconque. Posons $x = (x_1, x_2) = \left(-1 - \frac{r}{2}, 0\right)$. Montrons que $x \in B(a,r)$: On a

$$d(a,x) = \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} = \sqrt{\left|-1 - \frac{r}{2} - (-1)\right|^2 + |0-0|^2} = \frac{r}{2} < r,$$

et donc, on a bien que $x \in B(a,r)$.
De plus, $x \notin E$. En effet,

$$x_1 = -1 - \underbrace{\frac{r}{2}}_{>0} < -1.$$

On a donc bien que E n'est pas ouvert.
Pour montrer que E n'est pas fermé, on montre que

$$F = \mathbb{R}^2 \backslash E = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 < -1 \text{ ou } x_1 \geq 1\right\}$$

n'est pas ouvert. Les arguments sont très similaires à ci-dessus, on choisit $a = (1, 0)$, et $x = \left(\max\left(0, 1 - \frac{r}{2}\right), 0\right)$. On aura $-1 \leq x_1 < 1$ et donc, $x \notin F$.

Remarque 2.7.
Lorsqu'on doit trouver le rayon $r > 0$ à choisir dans la définition pour montrer qu'un ensemble est ouvert, sur un dessin, on cherche la plus petite distance entre l'élément quelconque de E qu'on a choisi et la frontière de E.

Proposition 2.8. *(i) Une union quelconque d'ouverts est ouverte.*

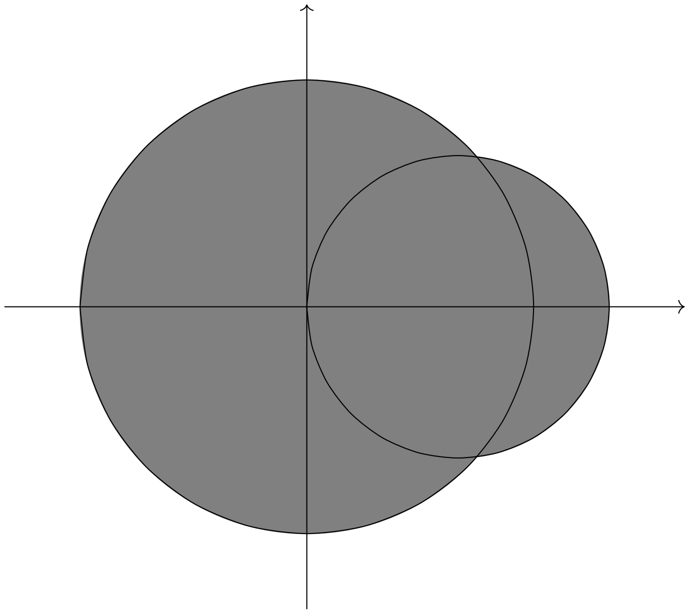
(ii) Une intersection finie d'ouverts est ouverte.

(iii) Une intersection quelconque de fermés est fermée.

(iv) Une union finie de fermés est fermée.

Pour la démonstration, voir page 99.

Exemple 2.9. (*i*) Soit $E = \overline{B}((0,0),3) \cup \overline{B}((2,0),2)$



Alors, E est fermé comme union de deux fermés.

(ii) Soit pour $n \geq 1$ l'intervalle $I_n = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| < \frac{1}{n}\right\} = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Alors, chaque I_n est ouvert, mais

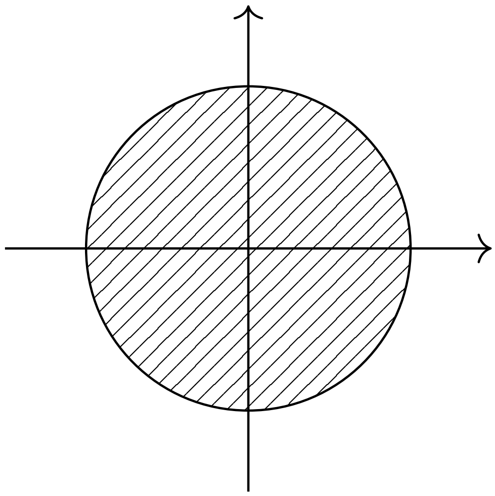
$$\begin{aligned} I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ \forall n, \ x \in I_n\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \forall n, \ |x| < \frac{1}{n}\right\} = \{0\}, \end{aligned}$$

qui est fermé.

Remarque 2.10.
On regroupe dans cette remarque quelques principes pour déterminer "à l'oeil" si un ensemble est ouvert ou fermé.

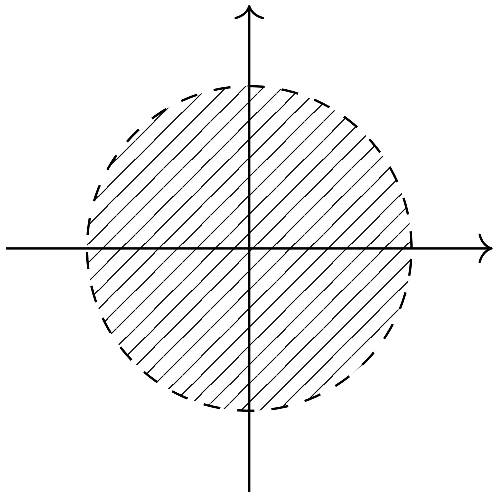
(i) Pour un ensemble dans $\mathbb{R}^2$, on peut déterminer sur un dessin si un ensemble est ouvert ou fermé. Par convention, on dessine la frontière d'une région avec un trait plein si celle-ci est dans l'ensemble, en traitillé si celle-ci n'est pas dans l'ensemble et on hachure l'intérieur d'une région. On ajoute encore des petits cercles pour d'éventuels points à enlever.

$\overline{B}(0,r)$



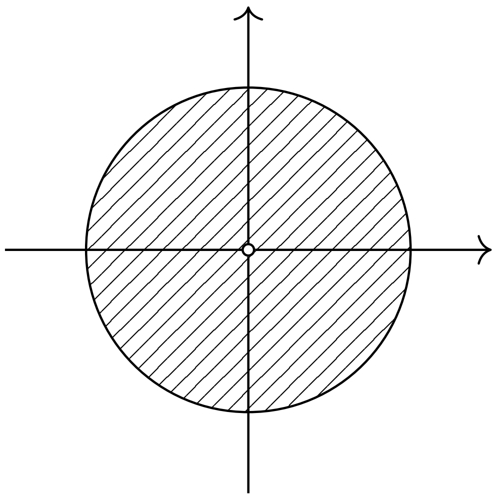
Fermé

$B(0,r)$



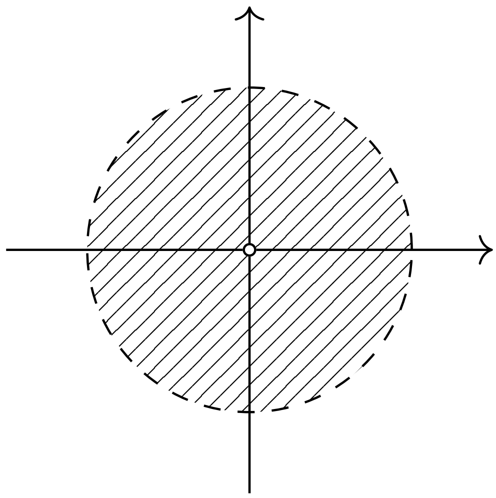
Ouvert

$\overline{B}(0,r)\backslash\{0\}$



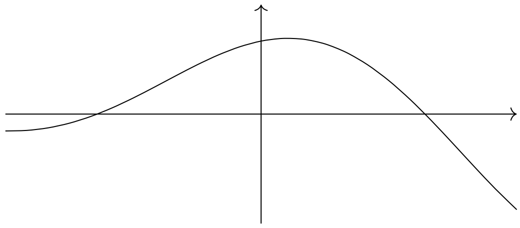
Ni ouvert ni fermé

$B(0,r)\backslash\{0\}$



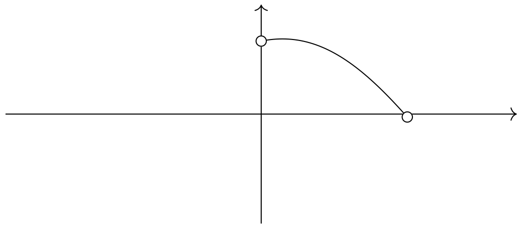
Ouvert

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y=f(x)\}$



Fermé

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0<x<2,\ y=f(x)\}$



Ouvert

Si sur le dessin de E, toute la frontière fait partie de E (que des lignes pleines ou des régions hachurées) E est fermé, si aucune partie de la frontière ne fait partie de E (que des lignes traitillées, des cercles vides pour enlever des points ou des régions hachurées) E est ouvert. Si certaines parties de la frontière sont dans l'ensemble et d'autres non, l'ensemble est ni ouvert ni fermé.

(ii) Pour un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ si il n'est pas de dimension pleine, E ne peut jamais être ouvert :

Dans $\mathbb{R}$, les ensembles de dimension pleine sont les intervalles, les ensembles qui ne sont pas de dimension pleine sont les points isolés.

Dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles de dimension pleine sont les patatoïdes, les ensembles qui ne sont pas de dimension pleine sont les courbes et les points.

Dans $\mathbb{R}^3$, les ensembles de dimension pleine sont les patatoïdes, les ensembles qui ne sont pas de dimension pleine sont les surfaces (les ensembles sans épaisseur), les courbes et les points.

(iii) Souvent si toutes les conditions qui définissent un ensemble sont des inégalités (strictes) $(<, >, \neq)$, alors l'ensemble est ouvert (voir remarque 4.5, page 82 pour exactement quand.)

(iv) Souvent si toutes les conditions qui définissent un ensemble sont des égalités ou des inégalités larges) $(\leq, \geq, =)$, alors l'ensemble est fermé (voir remarque 4.5, page 82 pour exactement quand.)

Définition 2.11 (Intérieur, bord, adhérence)**.**
Soit E un ensemble.

(i) L'*intérieur de de E* noté $\operatorname{int} E$ ou $\mathring{E}$ est l'ensemble défini par

$$\operatorname{int} E = \{x \in E \ : \ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset E\}\,.$$

(ii) Le *bord de E* noté ∂E est l'ensemble défini par

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap E \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \cap [\mathbb{R}^n \backslash E] \neq \emptyset\}$$

(iii) L'*adhérence de E*, notée $\operatorname{adh} E$ ou $\overline{E}$ est l'ensemble

$$\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap E \neq \emptyset\}\,.$$

(iv) Par convention, on a

$$\operatorname{int} \emptyset = \emptyset, \quad \partial\emptyset = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset$$

et

$$\operatorname{int} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n, \quad \partial\mathbb{R}^n = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$$

Proposition 2.12.
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble.
Alors,

(i) $\operatorname{int} E$ *est ouvert,* $\overline{E}$, ∂E *sont fermés.*

(ii) $(\operatorname{int} E) \cap \partial E = \emptyset$.

(iii) $\operatorname{int} E \subset E \subset \overline{E}$.

(iv) $\operatorname{int} E = E \backslash \partial E = \overline{E} \backslash \partial E$.

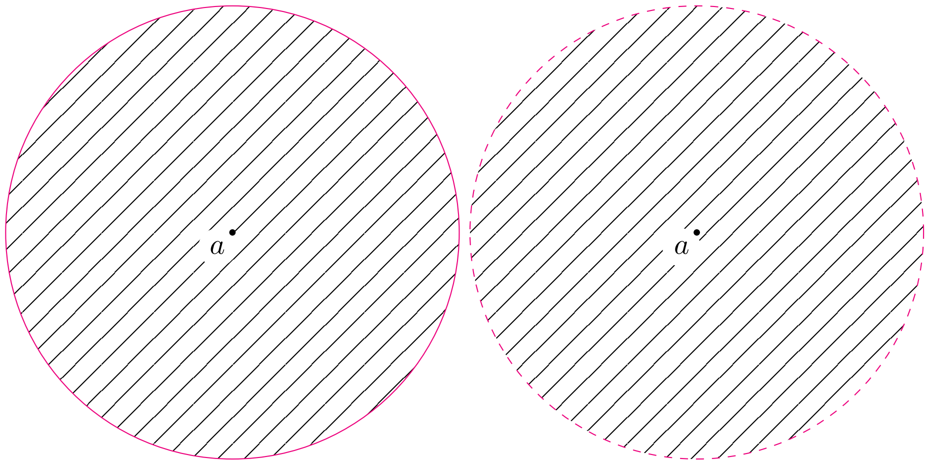
(v) $\partial E = \overline{E} \backslash \operatorname{int} E$

(vi) $\overline{E} = E \cup \partial E = (\operatorname{int} E) \cup \partial E$.

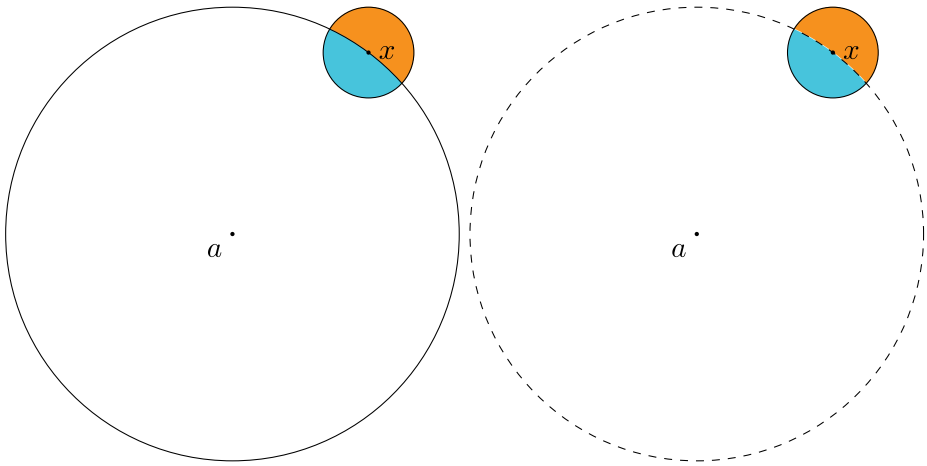
(vii) E *est ouvert si et seulement si* $E = \operatorname{int} E$.

(viii) E est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.

Exemple 2.13. (i) Les boules. Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$. On a vu que $B(a, R)$ est ouvert donc, $\operatorname{int} B(a, R) = B(a, R)$ et $\overline{B}(a, R)$ est fermé, donc $\overline{\overline{B}(a, R)} = \overline{B}(a, R)$. Intéressons nous à $\partial B(a, R)$ et $\partial \overline{B}(a, R)$.



La partie qui nous intéresse est la frontière de la région (la partie en rose dans la figure ci-desus) qu'elle soit dans E ou non. Si on centre une boule sur la frontière, quel que soit le rayon il y aura toujours une partie de la boule qui sera a l'extérieur (en orange ci-dessous) et une partie à l'intérieur (en bleu ci-dessous).



On voit donc que le bord est, dans les deux cas

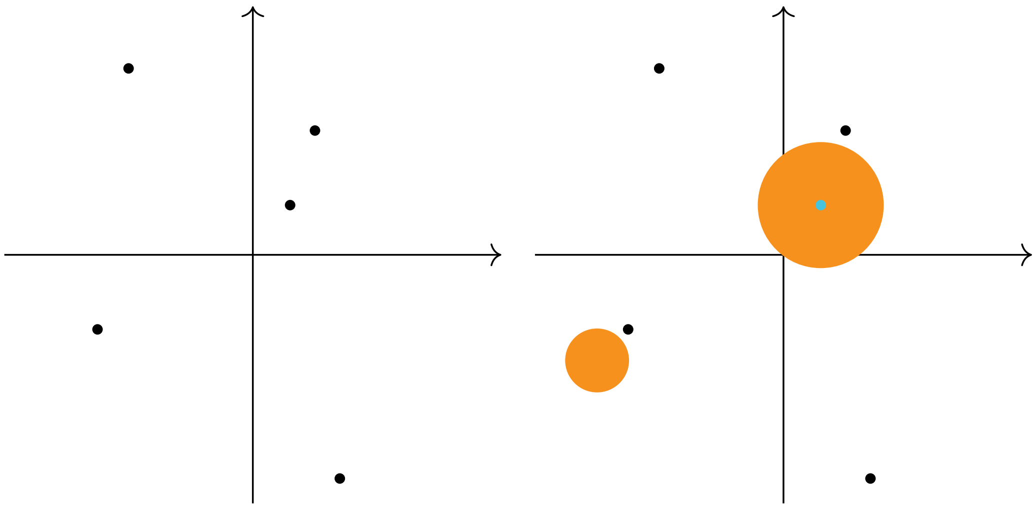
$$\partial B(a, R) = \partial \overline{B}(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| = R\}$$

On conclut de plus

$$\begin{aligned}
\overline{B(a, R)} =& B(a, R) \cup \partial B(a, R) \\
=& \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| < R\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| = R\} \\
=& \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| \leq R\} = \overline{B}(a, R),
\end{aligned}$$

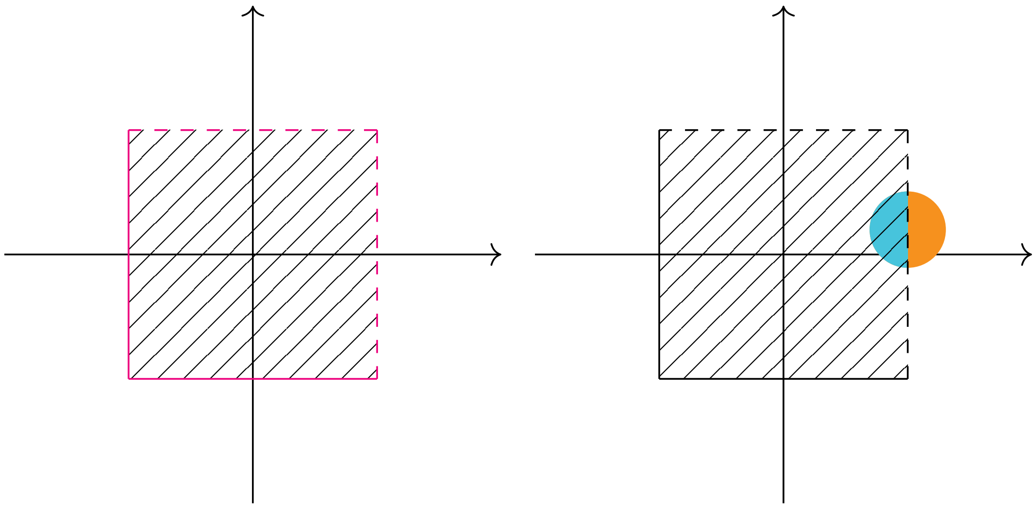
$$\begin{aligned}
\operatorname{int} \overline{B}(a, R) =& \overline{B}(a, R) \backslash \partial \overline{B}(a, R) \\
=& \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| \leq R\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| = R\} \\
=& \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| < R\} = B(a, R).
\end{aligned}$$

(ii) Soit $E = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de m points distincts dans $\mathbb{R}^n$. On note $a_i = (a_{i,1}, ..., a_{i,n})$.
Alors, $\partial E = E$:



Quel que soit le rayon aussi petit qu'on considère autour de chaque élément de E, le centre sera dans la boule mais parmis l'infinité d'éléments de la boule, certains ne seront pas dans E. De plus, quelque soit le point qui n'est pas dans E, on peut toujours trouver un rayon suffisamment petit pour que la boule ne contienne aucun élément de E.
Ainsi, $\overline{E} = E \cup \partial E = E$ et $\operatorname{int} E = E \backslash \partial E = \emptyset$.

(iii) Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x < 1, \ -1 \leq y < 1\}$.



Alors, le bord de E est la région dessinée en rose sur la figure de gauche :

$$\begin{aligned}\partial E = &\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = -1, \ -1 \leq y \leq 1\Big\} \\ &\cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1, \ -1 \leq y \leq 1\Big\} \\ &\cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ y = -1\Big\} \\ &\cup \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ y = 1\Big\}\end{aligned}$$

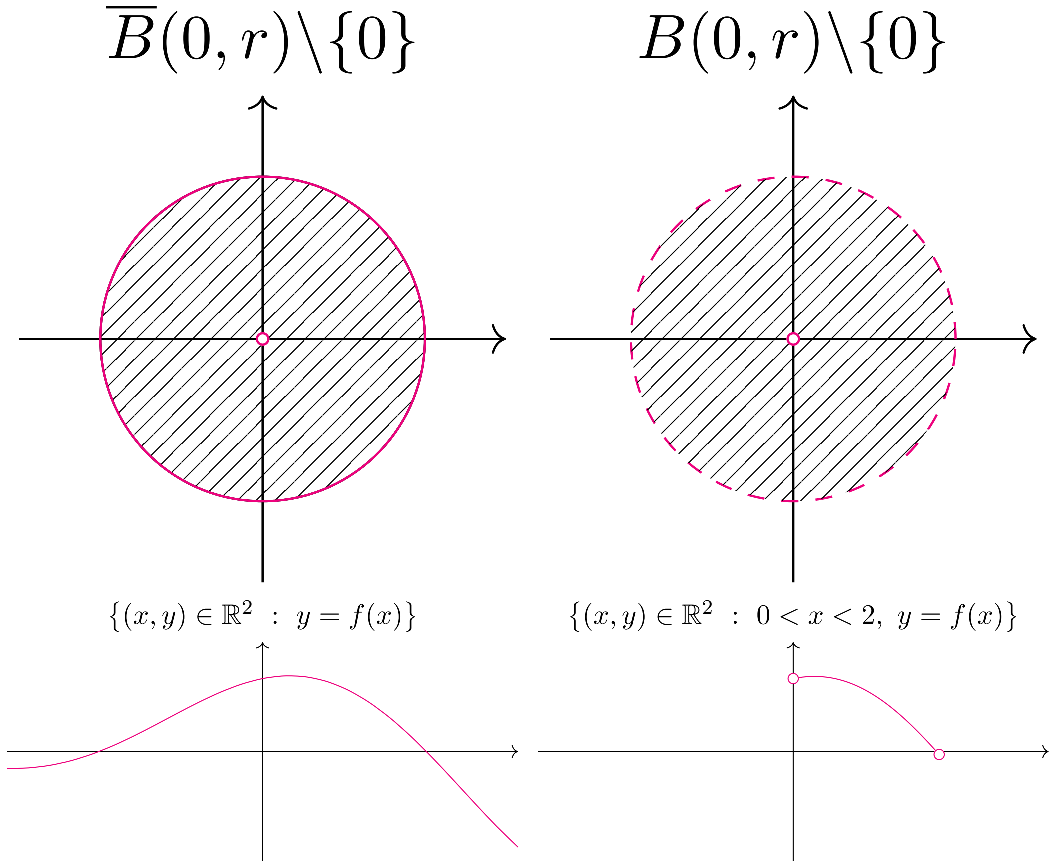
Ainsi, on déduit :

$$\begin{aligned} \operatorname{int} E =& E \backslash \partial E = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, \ -1 < y < 1 \Big\} \\ \overline{E} =& E \cup \partial E = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1 \Big\} \end{aligned}$$

Pour les détails, voir page 99.

Remarque 2.14.
On propose ici quelques techniques pour trouver "à l'oeil" l'intérieur, le bord et l'adhérence d'un ensemble.

(i) Dans $\mathbb{R}^2$, on utilise les mêmes conventions qu'à la remarque 2.10, page 47.



Alors, la partie hachurée est l'intérieur, les traits (traitillés ou non) les petits cercles pour les points qu'on enlève forment le bord, et tout ce qu'on dessine est l'adhérence.

(ii) Dans $\mathbb{R}^3$, la logique est la même, mais c'est plus difficile de le voir. Si on identifie notre ensemble à patate, la pelure est le bord. Les ensembles de dimension plus petites qu'on doit éventuellement enlever de notre ensemble (des courbes ou des points) font également partie du bord.

(iii) Souvent (on verra dans la partie du cours sur le théorème des fonctions implicites exactement quand) si notre ensemble est de la forme

$$E = \left\{ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x) < a_1, \ f_2(x) < a_2, ..., f_k(x) < a_k, \\ g_1(x) \leq b_1, \ g_2(x) \leq b_2, ..., \ g_l(x) \leq b_l \end{array} \right\},$$

on a que le bord se décompose en $k+l$ parties :

$$\begin{aligned}
\partial E = &\left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)=a_1,\ f_2(x)<a_2,...,f_k(x)<a_k, \\ g_1(x)\le b_1,\ g_2(x)\le b_2,...,\ g_l(x)\le b_l \end{array} \right\} \\
&\cup \left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)<a_1,\ f_2(x)=a_2,...,f_k(x)<a_k, \\ g_1(x)\le b_1,\ g_2(x)\le b_2,...,\ g_l(x)\le b_l \end{array} \right\} \\
&\cup \ldots \\
&\cup \left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)<a_1,\ f_2(x)<a_2,...,f_k(x)=a_k, \\ g_1(x)\le b_1,\ g_2(x)\le b_2,...,\ g_l(x)\le b_l \end{array} \right\} \\
&\cup \left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)<a_1,\ f_2(x)<a_2,...,f_k(x)<a_k, \\ g_1(x)=b_1,\ g_2(x)\le b_2,...,\ g_l(x)\le b_l \end{array} \right\} \\
&\cup \left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)<a_1,\ f_2(x)<a_2,...,f_k(x)<a_k, \\ g_1(x)\le b_1,\ g_2(x)=b_2,...,\ g_l(x)\le b_l \end{array} \right\} \\
&\cup \ldots \\
&\cup \left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)<a_1,\ f_2(x)<a_2,...,f_k(x)<a_k, \\ g_1(x)\le b_1,\ g_2(x)\le b_2,...,\ g_l(x)=b_l \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

et donc, pour avoir l'intérieur, on transforme toutes les inégalités larges en inégalités strictes (car lorsqu'il y a égalité, on est sur le bord) et pour avoir l'adhérence, on transforme toutes les inégalités strictes en inégalités larges.

$$\begin{aligned}
\operatorname{int} E &= \left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)<a_1,\ f_2(x)<a_2,...,f_k(x)<a_k, \\ g_1(x)<b_1,\ g_2(x)<b_2,...,\ g_l(x)<b_l \end{array} \right\} \\
\overline{E} &= \left\{ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{c} f_1(x)\le a_1,\ f_2(x)\le a_2,...,f_k(x)\le a_k, \\ g_1(x)\le b_1,\ g_2(x)\le b_2,...,\ g_l(x)\le b_l \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

De plus, souvent (on verra dans la partie du cours sur le théorème des fonctions implicites exactement quand) si une condition du style $h(x)=c$ apparaît dans la définition de E, on a $\operatorname{int} E=\emptyset$, et $\overline{E}=\partial E$ qui consiste juste à transformer toutes les inégalités strictes dans la définition de E en inégalités larges.

Définition 2.15 (Ensemble borné)**.**
Soit $E\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide. On dit que E est *borné* si $\exists M>0$ tel que

$$\forall x\in E,\ \|x\|\le M.$$

Remarque 2.16. (i) E est borné si et seulement si $\exists M>0$ tel que $E\subset\overline{B}(x,M)$.

(ii) À l'oeil, un ensemble est borné si, sur le dessin de l'ensemble il est possible de dézoomer suffisamment pour avoir l'ensemble dans sa totalité.

2.2 Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2.17 (Suite)**.**
Une *suite* dans $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une fonction $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$ sauf qu'on écrit x_k à la place de $f(k)$. Pour désigner une suite en entier, on écrit $(x_k)_{k\ge0}\subset\mathbb{R}^n$ ou juste (x_k).
Des fois, on fait commencer la suite à $k_0\ge1$ auquel cas, on écrit $(x_k)_{k\ge j_0}$.

Par convention, si x_k est un élément d'une suite, on écrit

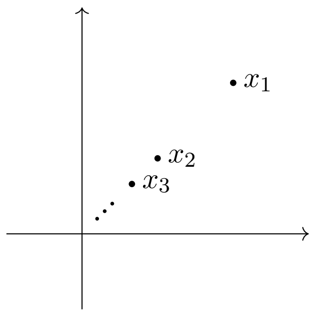
$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,i}, ..., x_{k,n}) .$$

$x_{k,i}$ désigne donc la $i^{\text{ème}}$ composante du $k^{\text{ème}}$ élément de la suite. Ainsi,

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{1,1}, x_{1,2}, ..., x_{1,n}) \\ x_2 &= (x_{2,1}, x_{2,2}, ..., x_{2,n}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

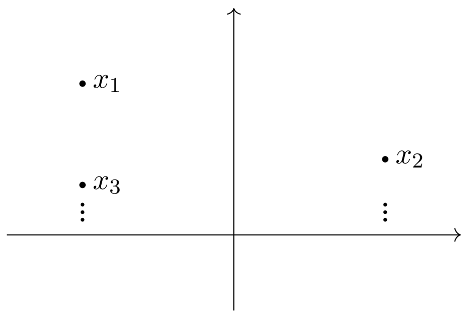
Exemple 2.18. *(i)* $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$.

$$x_1 = (1,1), \quad x_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad x_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad ...$$



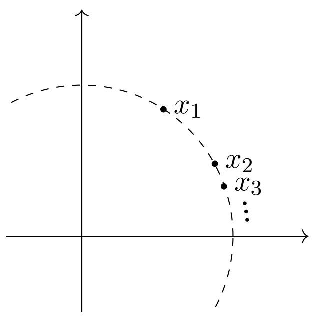
(ii) $x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$.

$$x_1 = (-1,1), \quad x_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right) \quad x_3 = \left(-1, \frac{1}{3}\right), \quad ...$$



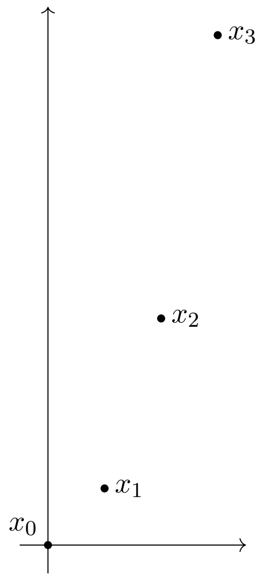
(iii) $x_k = \left(\cos\left(\frac{1}{k}\right), \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)$, $k \geq 1$

$$x_1 = (\cos(1), \sin(1)),\ x_2 = \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right), \sin\left(\frac{1}{2}\right)\right),\ x_3 = \left(\cos\left(\frac{1}{3}\right), \sin\left(\frac{1}{3}\right)\right),\ ...$$



(iv) $x_k = (k, k^2)$, $k \geq 0$.

$$x_0 = (0,0), \quad x_1 = (1,1), \quad x_2 = (2,4), \quad x_3 = (3,9), \quad ...$$



Définition 2.19 (Suite convergente, bornée)**.**
Soit $(x_k)_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ une suite.

(i) Soit $l \in \mathbb{R}^n$. On dit que $(x_k)_{k \geq 0}$ *converge vers* l si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \geq K,\ d(x_k, l) \leq \varepsilon.$$

On appelle alors l la *limite de la suite* (x_k) et on note

$$\lim_{k \to \infty} x_k = l.$$

(ii) On dit que (x_k) *converge* ou *est convergente* si

$$\exists l \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \geq K,\ d(x_k, l) \leq \varepsilon.$$

(iii) On dit que (x_k) *diverge* ou *est divergente* si elle n'est pas convergente.

(iv) On dit que (x_k) est bornée si $\exists c \geq 0$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_k\| \leq c.$$

Théorème 2.20 (Caractérisations des suites convergentes et bornées)**.**
Partie 1 *: Convergence.*
Soit $(x_k)_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ *une suite et* $l = (l_1, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n$*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{k \to \infty} x_k = l$.

(ii) $\forall 1 \leq i \leq n$, $\lim_{k \to \infty} x_{k,i} = l_i$. *(convergence composante par composante)*

(iii) $\lim_{k \to \infty} \|x_k - l\| = 0$. *(convergence en norme)*

Partie 2 *: Bornes.*
Sot $(x_k)_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ *une suite. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(iv) (x_k) *est bornée.*

(v) $\forall 1 \leq i \leq n$, $(x_{k,i}) \subset \mathbb{R}$ *est bornée.*

(vi) $(\|x_k\|) \subset \mathbb{R}$ *est bornée.*

Pour la démonstration, voir page 101.

Remarque 2.21.

Le théorème nous indique que pour discuter convergence ou borne sur les suites, on peut travailler composante par composante. Si chaque composante converge, la suite converge, si chaque composante est bornée, la suite est bornée. Inversement, dès qu'une composante de la suite diverge, la suite diverge et dès qu'une composante n'est pas bornée, la suite n'est pas bornée.

Exemple 2.22.
On reprend les exemples précédents

(i) Soit $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$. Chaque composante converge, et donc (x_k) converge :

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}, \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right) = (0,0)\,.$$

Remarquons également que

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - (0,0)\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{k} = 0.$$

(ii) Soit $x_k = \Big((-1)^k, 1/k\Big)$. On a que la promière composante de la suite, soit $(-1)^k$ diverge et donc la suite diverge. Par contre, chaque composante est bornée ($|(-1)^k| = 1$ et $|1/k| \leq 1$) et donc la suite est bornée. Remarquons qu'on aurait aussi pu le voir en norme :

$$\|x_k\| = \sqrt{(-1)^2k + \frac{1}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \to 1$$

et donc $(\|x_k\|)$ est une suite convergente et donc bornée et on conclut que (x_k) est bornée. Notons au passage que le fait que la limite $\lim_{k\to\infty} \|x_k\|$ existe n'implique pas que la suite converge en général. Seulement si $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$ on peut conclure que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. C'est similaire à l'analyse 1 : pour $(a_k) \subset \mathbb{R}$ $\lim_{k\to\infty} |a_k|$ existe n'implique pas que la suite converge, mais si $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$, alors, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(iii) $x_k = \left(\cos\frac{1}{k}, \sin\frac{1}{k}\right)$. Chaque composante de (x_k) converge et donc (x_k) converge :

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \left(\cos\frac{1}{k}, \sin\frac{1}{k}\right) = \left(\lim_{k\to\infty} \cos\frac{1}{k}, \lim_{k\to\infty} \sin\frac{1}{k}\right) = (1,0).$$

Remarquons également que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \|x_k - (1,0)\| &= \lim_{k\to\infty} \left\|\left(\cos\frac{1}{k} - 1, \sin\frac{1}{k}\right)\right\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\left(\cos\frac{1}{k} - 1\right)^2 + \sin^2\frac{1}{k}} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{k\to\infty} \cos\frac{1}{k} - 1\right)^2 + \lim_{k\to\infty} \sin^2\frac{1}{k}} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.\end{aligned}$$

Théorème 2.23 (Propriétés de la limite)**.**
Soient $(x_k)_{k\geq 0}$, $(y_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ *des suites convergentes et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors,*

(i) (x_k) *est bornée.*

(ii) $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|\lim_{k\to\infty} x_k\|$.

(iii) $\lim_{k\to\infty} \alpha x_k + \beta y_k = \alpha \lim_{k\to\infty} x_k + \beta \lim_{k\to\infty} y_k$.

(iv) $\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle \lim_{k\to\infty} x_k, \lim_{k\to\infty} y_k\rangle$.

(v) $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = d\left(\lim_{k\to\infty} x_k, \lim_{k\to\infty} y_k\right)$.

Pour la démonstration, voir page 101.

Définition 2.24 (Suite de Cauchy)**.**
Soit $(x_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^n$. On dit que (x_k) est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k, j \geq K,\ \|x_k - x_j\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.25.
Soit $(x_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ *une suite. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (x_k) *converge.*

(ii) (x_k) *est de Cauchy.*

(iii) $\forall 1 \leq i \leq n$, $(x_{k,i}) \subset \mathbb{R}$ *est de Cauchy.*

Définition 2.26 (Sous-suite)**.**
Soit $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ une suite. Une *sous-suite* est la donnée d'une suite d'indices $(k_j)_{j\geq 0} \subset \mathbb{N}$ tel que pour tout j, $k_{j+1} > k_j$. La sous-suite est alors $(x_{k_j})_{j\geq 0} \subset (x_k)$.

Remarque 2.27. (i) Attention de ne pas confondre sous-suite $(x_{k_j})_{j\geq 0} \subset (x_k)$ et suite d'une composante $(x_{k,i})_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Attention que pour les sous-suites, on ne peut pas travailler composante par composante sans être prudent. Quand on considère une sous-suite $(x_{k_j})_{j\geq 0} \subset (x_k)$, ceci définit n sous-suites $(x_{k_j,i})_{j\geq 0}$, mais la donnée de n sous-suites, composantes par composantes ne définit pas nécessairement une sous suite de (x_k).
Par exemple si $n = 2$, si on considère $(x_{k_j,1})_{j\geq 0} \subset (x_{k,1})$ et $(x_{\tilde{k}_j,2})_{j\geq 0} \subset (x_{k,2})$ alors, $(x_{k_j,1}, x_{\tilde{k}_j,2})_{j\geq 0}$ est une sous-suite de (x_k) seulement si $k_j = \tilde{k}_j$.

Exemple 2.28. (i) Soit $x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$. Alors, si on pose $k_j = 2j$, on a

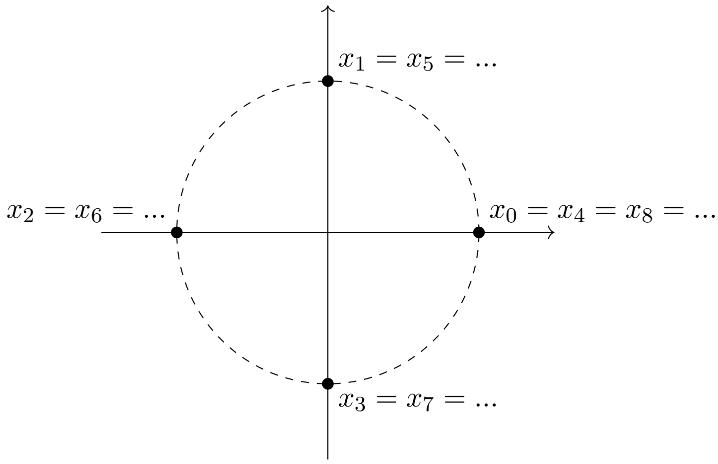
$$x_{k_j} = \left((-1)^{2j}, \frac{1}{2j}\right) = \left(1, \frac{1}{2j}\right).$$

Vu que les deux composantes convergent, $(x_{k_j}) \subset (x_k)$ converge et

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \left(\lim_{j\to\infty} 1, \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2j}\right) = (1, 0).$$

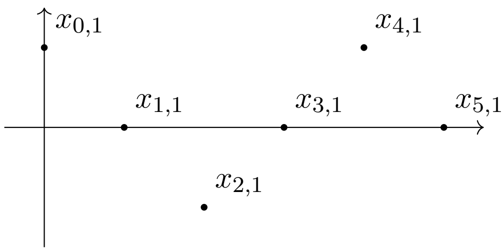
(ii) Soit $x_k = \left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $k \geq 0$. On a

$$x_0 = (1,0), \quad x_1 = (0,1), \quad x_2 = (-1,0), \quad x_3 = (0,-1), \quad x_4 = (1,0) = x_0, ...$$

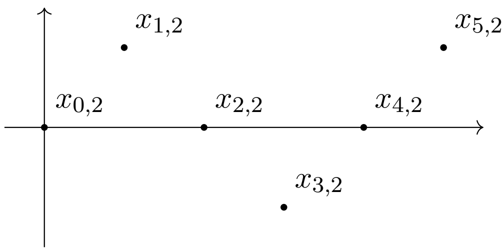


Les deux suites des deux composantes sont alors

$$x_{k,1} = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \qquad x_{k,2} = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$



$(x_{k,1})$



$(x_{k,2})$

Observons que pour la première composante, la sous-suite des termes impairs converge : Si on pose $k_j = 2j + 1$,

$$x_{k_j,1} = x_{2j+1,1} = \cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

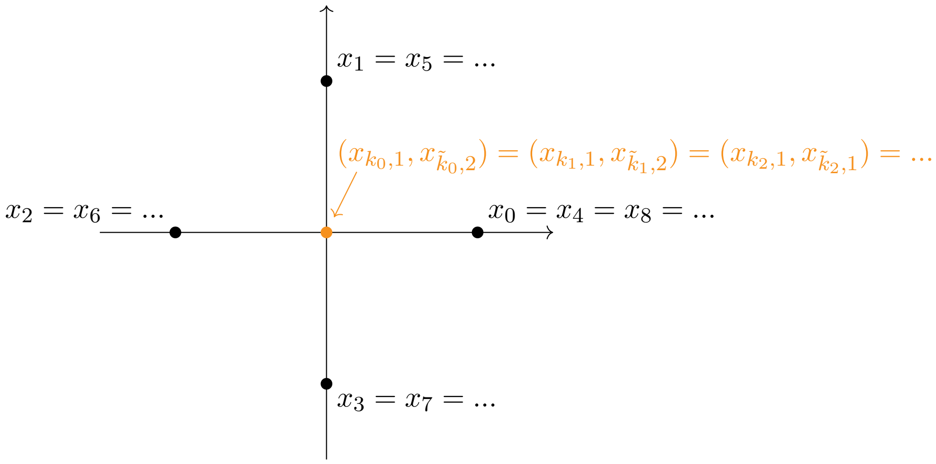
et pour la deuxième composante, la sous-suite des termes pairs converge : Si on pose $\tilde{k}_j = 2j$,

$$x_{\tilde{k}_j,2} = x_{2j,2} = \sin\left(2j\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Si on met maintenant ces deux sous-suites ensemble pour former une suite de $\mathbb{R}^2$,

$$(x_{k_j,1}, x_{\tilde{k}_j,1}) = (0, 0),$$

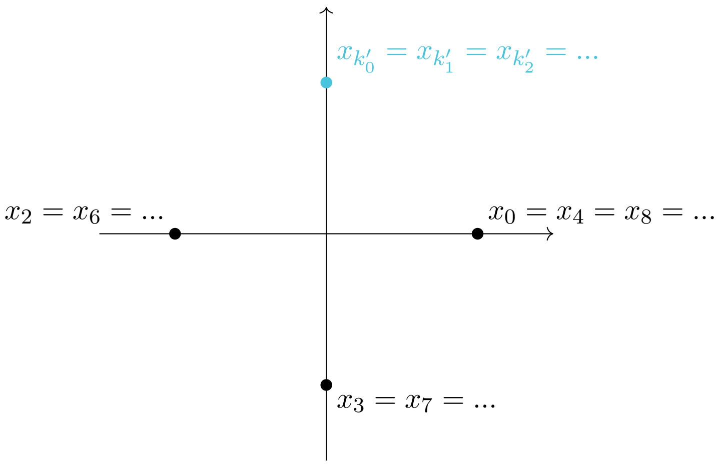
ces éléments ne correspondent à aucun élément de la suite de base.



Comme dans $\mathbb{R}$, la notion de sous-suite consiste à garder un nombre infini de points de notre suite originelle, pas de composer une nouvelle suite en prenant la première composante d'un élément de la suite et la deuxième composante d'un autre élément de la suite.
Le problème vient précisément du fait qu'ici, $k_j = 2j + 1 \neq 2j = \tilde{k}_j$.
À l'opposé, si on commence par définir $k'_j = 4j + 1$, alors,

$$x_{k'_j} = x_{4j+1} = \left(\cos\left((4j+1)\frac{\pi}{2}\right), \sin\left((4j+1)\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, 1)$$

définit bien une sous-suite de (x_k).



Et on récupère une sous-suite pour chaque composante $(x_{k'_j,1}) \subset (x_{k,1})$ et $(x_{k'_j,2}) \subset (x_{k,2})$.

Théorème 2.29 (Propriétés des sous-suites)**.**
Soit $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ *une suite. Alors,*

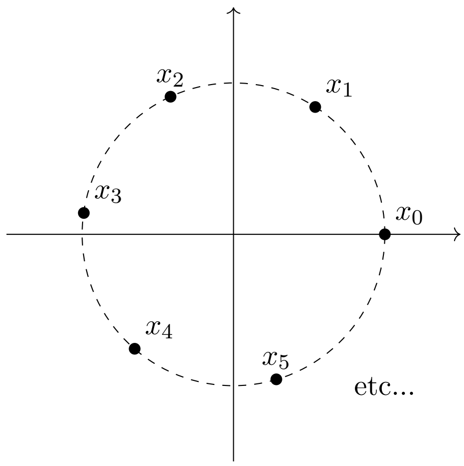
(i) (Bolzano-Weierstraß) *Si* (x_k) *est bornée,* $\exists (x_{k_j}) \subset (x_k)$ *une sous suite convergente.*

(ii) *La suite* (x_k) *converge si et seulement si toutes les sous-suites de* (x_k) *convergent vers la même limite.*

Pour la démonstration, voir page 101.

Remarque 2.30.
La deuxième partie du théorème est très utile pour montrer qu'une suite diverge : On extrait deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes et on en déduit que la suite en entier diverge.

Exemple 2.31.
Soit $x_k = (\cos(k), \sin(k))$, $k \geq 0$.



Alors, (x_k) est bornée. Il y a deux façons de le voir : $x_{k,1} = \cos(k) \in [-1, 1]$ est bornée et $x_{k,2} = \sin(k) \in [-1, 1]$ sont toutes deux bornées et donc, la suite en entier est bornée par le théorème 2.20, page 55. Une autre façon de le voir est que

$$\|x_k\| = \sqrt{x_{k,1}^2 + x_{k,2}^2} = \sqrt{\cos^2(k) + \sin^2(k)} = 1$$

qui est bornée. À nouveau, par le même théorème, on a que la suite en entier est bornée. Ainsi, par Bolzano-Weierstraß, (x_k) admet une sous-suite convergente. Fun fact : En réalité, quel que soit le point sur le cercle trigonométrique, il existe une sous-suite de (x_k) qui converge vers ce point (on n'a pas les outils pour le montrer dans le cadre de ce cours).

Théorème 2.32.
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide.
Alors, $x \in \overline{E}$ si et seulement si, il existe une suite $(x_k)_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ tel que

(i) $\forall k$, $x_k \in E$

(ii) $\lim_{k \to \infty} x_k = x$.

Pour la démonstration, voir page 101.

Exemple 2.33.
Soit $E =]a, b[\subset \mathbb{R}$ et $(x_k) \subset E$ une suite convergente. Alors, pour tout k, $a < x_k < b$. De plus, on a vu en analyse 1 qu'un passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges. Donc, $a \leq \lim_{k \to \infty} x_k \leq b$, ce qui est équivalent à $\lim_{k \to \infty} x_k \in [a, b] = \overline{]a, b[}$.

2.3 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$, courbes

Définition 2.34 (Limites, continuité, dérivée)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f \colon D \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$.
Au voisinage de x_0 :

(*i*) On dit que f est *définie au voisinage de* x_0 si $\exists\delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\backslash\{x_0\} \subset D$.

(*ii*) Soit $f \in \mathbb{R}^m$. Supposons que f est définie au visinage de x_0. On dit que l est *la limite de* f *en* x_0 si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\backslash\{x_0\},\ \|f(x)-l\| \leq \varepsilon.$$

On note alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

(*iii*) Supposons que $x_0 \in D$ et f est définie au voisinage de x_0. On dit que f est continue en x_0 si $lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[,\ \|f(x)-f(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

À gauche de x_0 :

(*iv*) On dit que f est *définie à gauche de* x_0 si $\exists\delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0[\subset D$.

(*v*) Soit $l \in \mathbb{R}^m$. Supposons que f est définie à gauche de x_0. On dit que l *est la limite à gauche en* x_0 si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0-\delta, x_0[,\ \|f(x)-l\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$.

(*vi*) Supposons que $x_0 \in D$ et que f est définie à gauche de x_0. On dit que f *est continue à gauche en* x_0 si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

À droite de x_0 :

(*vii*) On dit que f est *définie à droite de* x_0 si $\exists\delta > 0$ tel que $]x_0, x_0+\delta[\subset D$.

(*viii*) Soit $l \in \mathbb{R}^m$. Supposons que f est définie à droite de x_0. On dit que l *est la limite à droite en* x_0 si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0, x_0+\delta[,\ \|f(x)-l\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$.

(*ix*) Supposons que $x_0 \in D$ et que f est définie à droite de x_0. On dit que f *est continue à droite en* x_0 si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Sur un ensemble :

(*x*) Supposons que D est ouvert. On dit que f est continue si $\forall x \in D$, f est continue en x.

(*xi*) Supposons que $D = [a, b]$ avec $a < b$. On dit que f *est continue* si f est continue à droite en a, à gauche en b et continue en tout point $x \in]a, b[$. On note alors $f \in C^0([a, b], \mathbb{R}^m)$.

(*xii*) Supposons que $D = [a, b[$ avec $a < b$. On dit que f *est continue* si f est continue à droite en a et continue en tout point $x \in]a, b[$. On note alors $f \in C^0([a, b[, \mathbb{R}^m)$.

(*xiii*) Supposons que $D =]a, b]$ avec $a < b$. On dit que f *est continue* si f est continue à gauche en b et continue en tout point $x \in]a, b[$. On note alors $f \in C^0(]a, b], \mathbb{R}^m)$.

(*xiv*) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que f *est continue* si f est continue à droite en a et continue en tout point $x \in]a, +\infty[$. On note alors $f \in C^0([a, +\infty[, \mathbb{R}^m)$.

(xv) Supposons que $D =]-\infty, b]$. On dit que f *est continue* si f est continue à gauche en b et continue en tout point $x \in]-\infty, b[$. On note alors $f \in C^0(]-\infty, b, \mathbb{R}^m])$.

(xvi) Supposons que D est une union d'intervalles (différents d'intervalles du type $[a, a]$) deux à deux disjoints. On dit que f *est continue* si f est continue sur chaque intervalle qui compose D. On note alors $f \in C^0(D, \mathbb{R}^m)$.

Définition 2.35 (Dérivable, dérivée)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$.

(i) Supposons que f est définie au voisinage de x_0. On dit que f est *dérivable en* x_0 si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existe. On note alors

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

qu'on appelle la *dérivée* de f en x_0.

(ii) Supposons que $x_0 \in D$ et que f est définie à gauche de x_0. On dit que f *est dérivable à gauche en* x_0 si

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)$$

existe. On note alors cette limite $f'_g(x_0)$, qu'on appelle la *dérivée à gauche* de f en x_0.

(iii) Supposons que $x_0 \in D$ et que f est définie à droite de x_0. On dit que f *est dérivable à droite en* x_0 si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right)$$

existe. On note alors cette limite $f'_d(x_0)$, qu'on appelle la *dérivée à droite* de f en x_0.

(iv) Supposons que $D = [a, b]$ avec $a < b$. On dit que f *est dérivable* si f est dérivable à droite en a, à gauche en b et dérivable en tout point $x \in]a, b[$.

(v) Supposons que $D = [a, b[$ avec $a < b$. On dit que f *est dérivable* si f est dérivable à droite en a et dérivable en tout point $x \in]a, b[$.

(vi) Supposons que $D =]a, b]$ avec $a < b$. On dit que f *est dérivable* si f est dérivable à gauche en b et dérivable en tout point $x \in]a, b[$.

(vii) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que f *est dérivable* si f est dérivable à droite en a et dérivable en tout point $x \in]a, +\infty[$.

($viii$) Supposons que $D =]-\infty, b]$. On dit que f *est dérivable* si f est dérivable à gauche en b et dérivable en tout point $x \in]-\infty, b[$.

(ix) Supposons que D est une union d'intervalles (différents d'intervalles du type $[a, a]$) deux à deux disjoints. On dit que f *est dérivable* si f est dérivable sur chaque intervalle qui compose D.

Définition 2.36 (C^k)**.**
Soit D une union d'intervalles (différents d'intervalles du type $[a, a]$) deux à deux disjoints et $f\colon D \to \mathbb{R}^m$.

(i) On note $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ si f est dérivable et $f' \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$.

(ii) On note $f \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$ si $f' \in C'1(D, \mathbb{R}^m)$. On note la *dérivée d'ordre* 2 de f, $f''\colon D \to \mathbb{R}^m$ par $f''(x) = (f')'(x)$.

(*iii*) Plus généralement, pour $k \geq 2$, on note la dérivée d'ordre k de f par $f^{(k)}$. On note $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ si $f^{(k-1)} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, c'est-à-dire, toutes les dérivées d'ordre k ou moins existent et sont continues.

Définition 2.37 (courbe, courbe régulière)**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f\colon I \to \mathbb{R}^m$.

(*i*) On dit que f est une *courbe* si $f \in C^0(I, \mathbb{R}^m)$.

(*ii*) On dit que f est une *courbe régulière* si $f \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ et pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

Théorème 2.38.
Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ définie au voisinage de x_0 et $l \in \mathbb{R}^m$. Alors,

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *si et seulement si* $\forall 1 \leq i \leq n$, $\lim_{x\to x_0} f_i(x) = l$

(ii) Si $x_0 \in D$, f est continue en x_0 si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq n$, f_i est continue en x_0.

(iii) Si $x_0 \in D$, f est dérivable en x_0 si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq n$, f_i est dérivable en x_0. De plus, on a alors $f'(x_0) = (f_1'(x_0), ..., f_n'(x_0))$.

(iv) $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq n$, $f_i \in C^k(D)$.

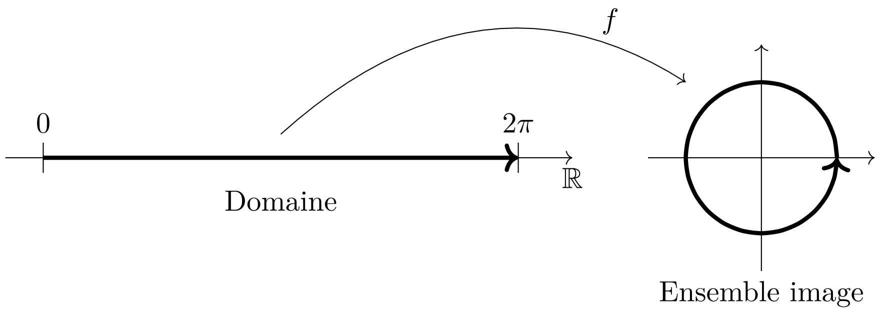
Définition 2.39 (Longueur)**.**
Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ une courbe. On définit la *longueur* de f par

$$L = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

Remarque 2.40. (*i*)

(*ii*) La longueur est en fait la longueur de l'image de f.

Exemple 2.41. (*i*) Soit $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$.

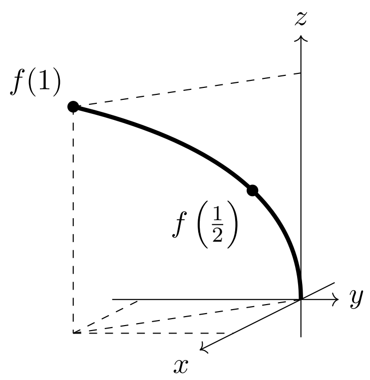


Alors, f est dérivable, $f'(x) = (-\sin(x), \cos(x))$. La longueur de la courbe est

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(x)\|\, dx = \int_0^{2\pi} = \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$$

qui donne bien le périmètre d'un cercle de rayon 1.

(*ii*) Soit $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = \left(x^3, -\frac{3}{\sqrt{2}}x^2, 3x\right)$.



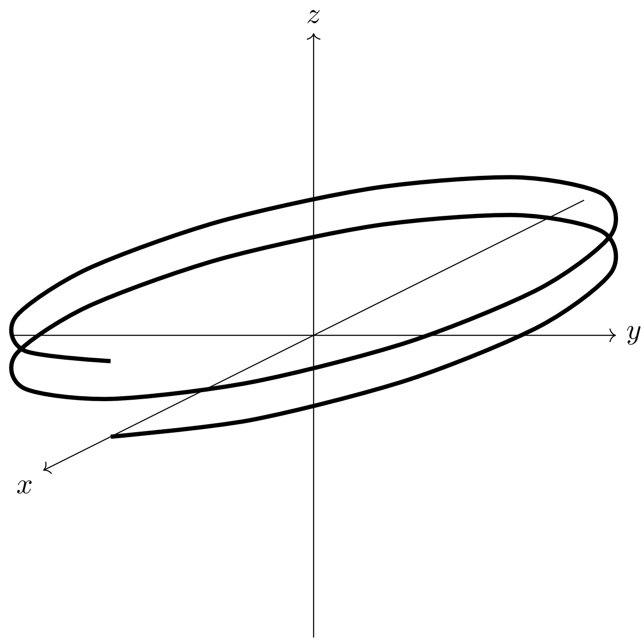
Alors, $f \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ et

$$\begin{aligned} f'(x) =& (3x^2, -3\sqrt{2}x, 3) = 3(x^2, -\sqrt{2}x, 1) \\ \|f'(x)\| =& 3\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = 3(x^2+1) \end{aligned}$$

et donc la longueur de f est

$$L = \int_0^1 \|f'(x)\|\, dx = \int_0^1 3x^2 + 3dx = \Big[x^3 + 3x\Big]_{x=0}^{x=1} = 4$$

(iii) Soit $f \colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = \left(3\cos(x), 3\sin(x), \frac{x}{4\pi}\right)$



On a $f \in C^1([0, 4\pi], \mathbb{R}^3)$ et

$$\begin{aligned} f'(x) =& \left(-3\sin(x), 3\cos(x), \frac{1}{4\pi}\right) \\ \|f'(x)\| =& \sqrt{9\sin^2(x) + 9\cos(x) + \frac{1}{16\pi^2}} = \sqrt{9 + \frac{1}{16\pi^2}}. \end{aligned}$$

et donc la longueur de f est

$$L = \int_0^{4\pi} \|f'(x)\|\, dx = \int_0^{4\pi} \sqrt{9 + \frac{1}{16\pi^2}} dx = 4\pi\sqrt{9 + \frac{1}{16\pi^2}}.$$

Définition 2.42 (Courbe, paramétrisation)**.**
Soit un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. On dit que Γ est une *courbe* si il existe $a < b \in \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma([a, b]) = \Gamma$. On appelle alors γ une *paramétrisation* de Γ. De plus,

(i) Si γ est injective sur $]a, b[$, on dit que Γ est une courbe *simple*.

(ii) Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que Γ est une courbe *fermée*.

Remarque 2.43.
Généralement, il existe une infinité de paramétrisation d'une courbe.

Exemple 2.44. (i) Le graphe d'une fonction.

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit Γ, son graphe :

$$\Gamma = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a, b], \ y = f(x) \Big\} .$$

Alors, la paramétrisation standard de Γ est $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (t, f(t)).$$

(ii) Un segment de droite. Soient $a = (a_1, ..., a_m), b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, et Γ, le segment de droite qui relie ces deux points. Alors, la paramétrisation standard de Γ est $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$\gamma(t) = a + t(b - a) = (t - 1)a + tb.$$

(iii) Un cercle. Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ quelconques et Γ le cercle centré en (x_0, y_0) de rayon R :

$$\Gamma = \partial B((x_0, y_0), R) = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Big\} .$$

Alors, la paramétrisation standard de Γ est $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$$

Chapitre 3

Limites de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

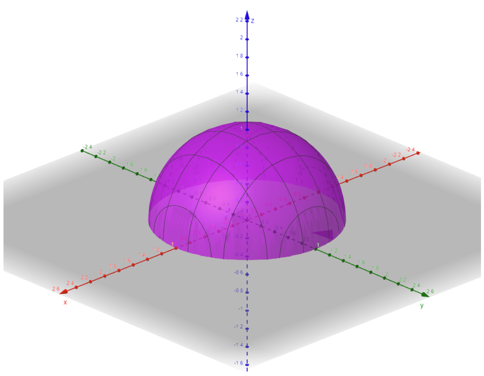
3.1 Introduction, exemples

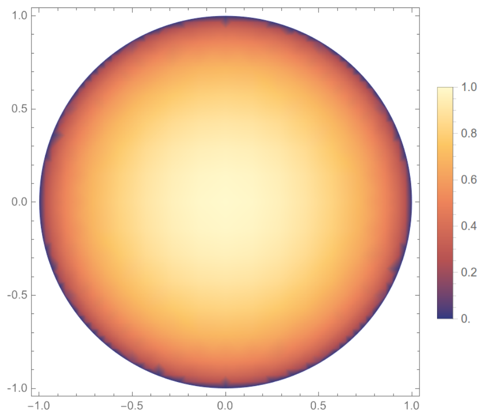
Exemple 3.1. (i) Les *champs scalaires* $(m = 1)$.

Un champ scalaire est une fonction d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Par exemple, $D = B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Si $n = 2$, on a deux façons de représenter la fonction : Avec son graphe (à gauche co-dessous), ou avec sa *heat map* (à droite ci-dessous).





Dès que $n \geq 3$, on en peut plus vraiment bien représenter une fonction ; son graphe est en dimension 4 et la heatmap demanderait de faire des coupes dans le domaine.

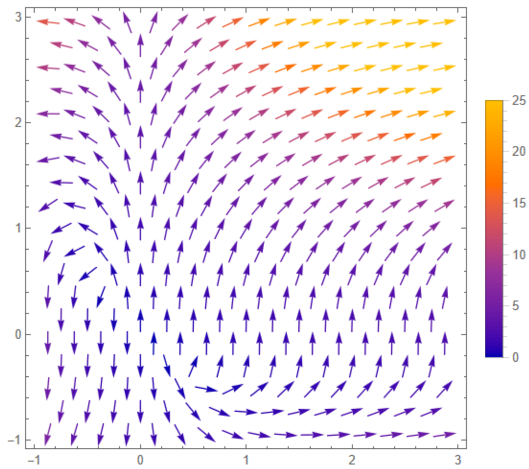
(ii) Les *champs vectoriels* $(m = n)$.

Un champ vectoriel est une fonction d'un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$: $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Par exemple, $D =]-1,3[\times]-1,3[$ et $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ est définie par

$$f(x,y) = (xy^2, \log(x+1) + y).$$

Pour $n = 2$, on ne peut par représenter le graphe de f car c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$. On peut néanmoins représenter la fonction avec un champ de flèches : à chaque point du domaine, on vient déposer un vecteur qui est l'image de ce point :



Ici, les flèches donnent la direction de $f(x, y)$ et la couleur donne la longueur de $f(x, y)$.
Dans $\mathbb{R}^3$, on peut faire la même chose, mais si on n'est pas dans un environnement 3D où on peut bouger les choses, ça n'aide pas beaucoup à comprendre les choses.

(*iii*) Tous le reste.
Par exemple, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ définie par

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, x + 5, \frac{y}{x^2 + z^2}, \log(x^2 + y^2 + z^4), x\right)$$

Définition 3.2 (Fonction bornée)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ non-vide et $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est *bornée* si $\exists M > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $\|f(x)\| \leq M$.

3.2 Limites de fonctions à plusieurs variables

Définition 3.3 (Définie au voisinage, limite)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, .., .\tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f\colon D \to \mathbb{R}^m$.

(*i*) On dit que f est *définie au voisinage de* $\tilde{x}$ si $\exists \delta > 0$ tel que $B(\tilde{x}, \delta)\backslash\{\tilde{x}\} \subset D$.

(*ii*) Supposons que f est définie au voisinage de $\tilde{x}$ et soit $l \in \mathbb{R}^m$. On dit que l est la *limite* de f en $\tilde{x}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in B(\tilde{x}, \delta)\backslash\{\tilde{x}\},\ \|f(x) - l\| \leq \varepsilon.$$

On note alors

$$l = \lim_{x \to \tilde{x}} f(x).$$

Théorème 3.4.
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$*,* $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$*,* $f\colon D \to \mathbb{R}^m$*,* $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ *définie au voisinage de* $\tilde{x}$ *et* $l = (l_1, ..., l_m) \in \mathbb{R}^m$*. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{x\to\tilde{x}} f(x) = l$

(ii) $\forall 1 \leq i \leq m$*,* $\lim_{x\to\tilde{x}} f_i(x) = l_i$

(iii) pour toute suite $(a_k) \subset \mathbb{R}^n$ *telle que*

$$a_k \in D\backslash\{\tilde{x}\} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = \tilde{x}$$

on a

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = l.$$

(iv) pour toute courbe $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *telle que*

$$\gamma(]a,b]) \subset D\backslash\{\tilde{x}\} \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to a^+} \gamma(t) = \tilde{x}$$

on a

$$\lim_{t\to a^+} f(\gamma(t)) = l.$$

Proposition 3.5 (Propriétés algébriques des limites de fonctions à plusieurs variables)**.**
Soient $D, E \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *et* $f\colon D \to \mathbb{R}^m$, $g\colon E \to \mathbb{R}^m$ *définies au voisinage de* $\tilde{x}$ *et telles que les limites*

$$\lim_{x\to\tilde{x}} f(x), \qquad \lim_{x\to\tilde{x}} g(x)$$

existent.
Alors,

(i) $\lim_{x\to\tilde{x}} \|f(x)\| = \|\lim_{x\to\tilde{x}} f(x)\|$.

(ii) $\lim_{x\to\tilde{x}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to\tilde{x}} f(x) + \beta \lim_{x\to\tilde{x}} g(x)$.

(iii) $\lim_{x\to\tilde{x}} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle \lim_{x\to\tilde{x}} f(x), \lim_{x\to\tilde{x}} g(x)\rangle$.

(iv) $\lim_{x\to\tilde{x}} d(f(x), g(x)) = d(\lim_{x\to\tilde{x}} f(x), \lim_{x\to\tilde{x}} g(x))$.

(v) si $m = 1$ *et* $\lim_{x\to\tilde{x}} g(x) \neq 0$,

$$\lim_{x\to\tilde{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\tilde{x}} f(x)}{\lim_{x\to\tilde{x}} g(x)}$$

Remarque 3.6.
Comme pour les suites et les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, on peut travailler composante par composante pour déterminer la limite d'une fonction. On va donc surtout développer des techniques pour les limites de champs scalaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exemple 3.7 (Le problème des limites à plusieurs variables)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

et intéressons nous à la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Comment trouver cette limite ? Une idée (malheureusement naïve) est de calculer une des deux limites

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

Or, ici, dans les deux cas,

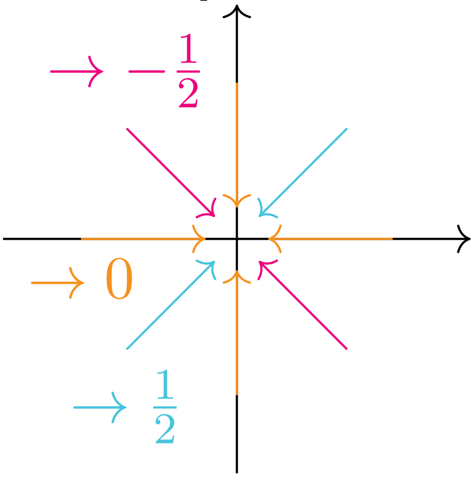
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0.$$

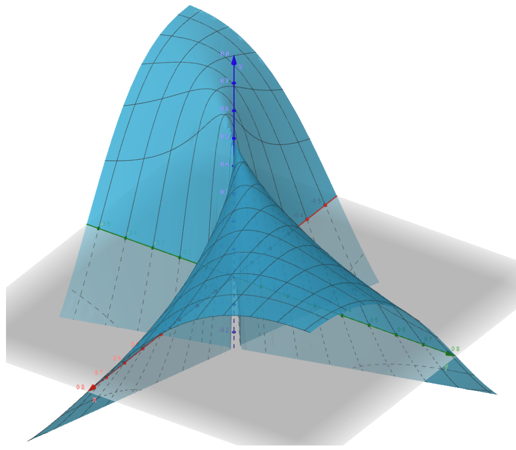
On peut donc être mené à penser que la limite de la fonction est 0 en $(0,0)$.

Néanmoins, il n'y a pas de raison que nos deux variables tendent vers 0 l'une après l'autre. Elles pourraient aussi tendre vers 0 en même temps. Une autre idée est de calculer

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

et on obtient un résultat différent.
Comme dans la caractérisation de la limite de fonctions par les suites en analyse I, s'approcher de deux façons différentes de $(0,0)$ et trouver des résultat différent veut dire que la limite n'existe pas.

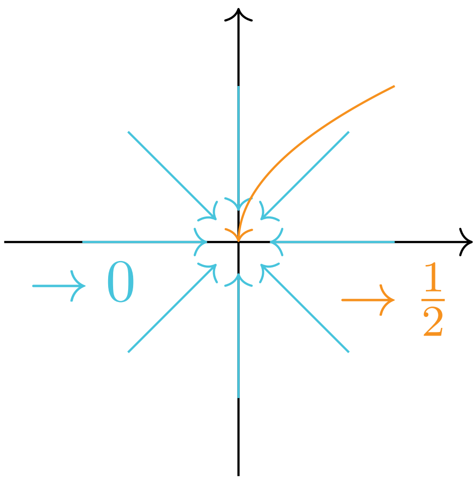




Une prochaine idée serait de tester toutes les directions possibles :

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pas tous deux nuls (on obtient ainsi toutes les droites d'équation $\beta x - \alpha y = 0$ qui sont toutes les droites qui passent par 0) et si on obtient toujours la même chose (i.e. quelque chose d'indépendant de α et β) est-ce qu'on peut en déduire que la limite existe ? Non, il est possible que toutes les directions donnent la même chose mais que la limite n'existe pas, car on obtient quelque chose de différent en suivant une trajectoire qui n'est pas rectiligne.



Par exemple, si $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4},$$

alors, quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4}.$$

Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$ et on obtient 0. Sinon,

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} = \frac{0}{\alpha + 0} = 0.$$

On obtient bien 0 dans toutes les directions. Par contre,

$$\lim_{t\to 0} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}.$$

à nouveau, ceci veut dire que la limite n'existe pas.

Théorème 3.8 (Critère des deux gendarmes dans $\mathbb{R}^n$)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (tildex_1, ..., \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\tilde{x}$ et $l \in \mathbb{R}$.
Alors

$$\lim_{x\to\tilde{x}} f(x) = l$$

si et seulement si $\exists \delta > 0$ et $\psi\colon]0, \delta[\to \mathbb{R}$ tel que

(i) $\lim_{t\to 0^+} \psi(r) = 0$,

(ii) $\forall x \in B(\tilde{x}, \delta)$, $|f(x) - l| \leq \psi(\|x - \tilde{x}\|)$.

Pour la démonstration, voir page 101.

3.3 Limites de fonctions à 2 variables

Théorème 3.9 (Critère des deux gendarmes en coordonnées polaires)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $l \in \mathbb{R}$.
Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x, y) = l$$

si et seulement si $\exists \delta > 0$ et $\psi\colon]0, \delta[\to \mathbb{R}$ tel que

(i) $\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$

(ii) $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $|f(\tilde{x} + r\cos\theta, \tilde{y} + r\sin\theta) - l| \leq \psi(r)$

Pour la démonstration, voir page 101.

Méthode 3.10 (Discussion des limites de fonctions)**.**
On considère $D \subset \mathbb{R}^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ et on discute si la limite

$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x, y)$$

existe et ce qu'elle vaut le cas échéant.
Étape 1 : Test des directions.
On fixe $\theta \in [0, 2\pi]$ et on calcule

$$\lim_{r\to 0^+} f(\tilde{x} + r\cos\theta, \tilde{y} + r\sin\theta).$$

Si cette limite n'existe pas, la limite $\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x, y)$ n'existe pas.

Si la limite existe, mais dépend de θ, la limite $\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x,y)$ n'existe pas (on peut choisir deux $\theta_1 \neq \theta_2$ qui donnent des résultats différents, poser $\gamma_1(t) = (\tilde{x} + t\cos\theta_1, \tilde{y} + t\sin\theta_1)$ et $\gamma_2(t) = (\tilde{x} + t\cos\theta_2, \tilde{y} + t\sin\theta_2)$ pour $t \in [0,1]$ et appliquer le théorème 3.4, page 67.)
Si la limite existe, et est indépendante de θ, on l'appelle l et c'est notre candidat à être la limite. (On ne peut pas encore conclure que c'est la limite !) On passe à l'étape 2.
Étape 2 : Critère des deux gendarmes.
On estime

$$|f(\tilde{x} + r\cos\theta, \tilde{y} + r\sin\theta) - l|$$

par une fonction indépendante de θ, $\psi(r)$ et telle que $\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$.
Si on trouve une telle fonction ψ, alors

$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x,y) = l.$$

Si on n'arrive pas à trouver cette fonction ψ, on passe à l'étape 3.
Étape 3 : Trouver une façon de s'approcher de $(\tilde{x},\tilde{y})$ qui donnent un résultat différent de l.
Essayer de trouver une courbe $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(]a,b]) \subset B\backslash\{(\tilde{x},\tilde{y})\}$ et

$$\lim_{t\to a^+} f(\gamma(t)) \neq l.$$

Si on trouve une telle courbe γ, alors la limite

$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x,y)$$

n'existe pas.
Si on n'arrive pas à trouver cette courbe γ, on retente l'étape 2.

Exemple 3.11. (*i*) Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Étape 1 : Test des directions.
On calcule

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \lim_{r\to 0^+} r\cos\theta\cos\left(\frac{1}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right)\\ &= \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r}_{\to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)}_{-1\leq\ldots\leq 1} \cos\theta\\ &= 0\cdot\cos\theta = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $l = 0$ est indépendant de θ.
Étape 2 : Critère.

On a

$$
\begin{aligned}
|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| = & \left| r\cos\theta\cos\left(\frac{1}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right) - 0\right| \\
= & r\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1}\left|\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)\right| \\
\leq & \left| r\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)\right| \to 0.
\end{aligned}
$$

En posant $\psi(r) = \left| r\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)\right|$, on a bien

$$\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$$

et $\forall \theta \in [0, 2\pi]$,

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| \leq \psi(r).$$

Ainsi, le critère est vérifié et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{2|x|}{x^2 + |x| + y^2}$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Étape 1 : Test des directions. On calcule

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{2r|\cos\theta|}{r^2\cos^2\theta + r|\cos\theta| + r^2\sin^2\theta} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{2r|\cos\theta|}{r^2 + r|\cos\theta|} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{2|\cos\theta|}{r + |\cos\theta|} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \cos\theta = 0 \\ 2 & \text{si } \cos\theta \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi, si on choisit $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, on a

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1) =& 2 \\
\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta_2, r\sin\theta_2) =& 0,
\end{aligned}
$$

et donc la limite $\lim_{r\to 0^+} f(x,y)$ n'existe pas.

Théorème 3.12 (Critère des deux gendarmes en coordonnées elliptiques)**.**
Soit $a, b > 0$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x,y) = l$$

si et seulement si $\exists \delta > 0$ et $\psi\colon]0, \delta[\to \mathbb{R}$ tel que *(i)* $\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$

(ii) $\forall \theta \in [0, 2\pi],\ |f(\tilde{x} + ar\cos\theta, \tilde{y} + br\sin\theta) - l| \leq \psi(r)$

Pour la démonstration, voir page 101.

Théorème 3.13 (Critère des deux gendarmes en coordonnées cartésiennes)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $l \in \mathbb{R}$.
Si $\exists \delta > 0$ et $\varphi\colon]\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta[\to \mathbb{R}$ tel que

(i) $\lim_{x\to \tilde{x}} \varphi(x) = 0$

(ii) $\forall (x, y) \in B((\tilde{x}, \tilde{y}), \delta),\ |f(x, y) - l| \leq \varphi(x)$.

Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x, y) = l.$$

Pour la démonstration, voir page 101.

Théorème 3.14 (Critère des deux gendarmes en coordonnées cartésiennes, bis)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $l \in \mathbb{R}$.
Si $\exists \delta > 0$ et $\varphi\colon]\tilde{y} - \delta, \tilde{y} + \delta[\to \mathbb{R}$ tel que

(i) $\lim_{y\to \tilde{y}} \varphi(y) = 0$

(ii) $\forall (x, y) \in B((\tilde{x}, \tilde{y}), \delta),\ |f(x, y) - l| \leq \varphi(y)$.

Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(\tilde{x},\tilde{y})} f(x, y) = l.$$

Pour la démonstration, voir page 101.

Remarque 3.15. (*i*) Les critères des deux gendarmes en coordonnées polaires ou elliptiques sont équivalents à l'existence de la limite. Ainsi, si la limite existe, la fonction ψ doit exister.

Par contre, pour les critères en coordonnées carthésiennes, il existe des fonctions pour lesquels la limite existe, mais il est impossible de trouver une fonction φ qui vérifie toutes les hypothèses.

(*ii*) Le critère des deux gendarmes en coordonnées elliptiques est surtout utile lorsqu'on a affaire à des fonctions dont le dénominateur ressemble à $\frac{\text{quelque chose}}{\frac{1}{a^2}(x-\tilde{x})^2 + \frac{1}{b^2}(y-\tilde{y})^2}$.

Dans cette situation, la méthode 3.10, page 70 s'adapte simplement en remplaçant toutes les occurrences de $f(\tilde{x} + r\cos\theta, \tilde{y} + r\sin\theta)$ par $f(\tilde{x} + ar\cos\theta, \tilde{y} + br\sin\theta)$. et

Exemple 3.16. (*i*) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^3 - xy}{\sqrt{2x^2 + \frac{y^2}{4}}}.$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

Au vu de la forme du dénominateur (x et y à la puissance 2 mais avec des facteurs constants devant) on passe en coordonnées elliptiques :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\theta, 2r\sin\theta\right).$$

Étape 1 : Test des directions.
On calcule

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta, 2r\sin\theta\right) &= \lim_{r\to 0+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}r^3\cos^3\theta - \sqrt{2}r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{2\frac{1}{2}r^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}4r^2\sin^2\theta}} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}r^3\cos^3\theta - \sqrt{2}r^2\cos\theta\sin\theta}{r} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{2}}r^2\cos^3\theta - \sqrt{2}r\cos\theta\sin\theta = 0.\end{aligned}$$

Étape 2 : Critère.
On a

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta, 2r\sin\theta\right) - l\right| &= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}r^2\cos^3\theta - \sqrt{2}r\cos\theta\sin\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}r^2\underbrace{\left|\cos^3\theta\right|}_{\leq 1} + \sqrt{2}r\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1}\underbrace{|\sin\theta|}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{r^2}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}r \to 0.\end{aligned}$$

Choisissant donc $\psi(r) = \frac{r^2}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}r$, on a bien

$$\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$$

et

$$\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta, 2r\sin\theta\right) - l\right| \leq \psi(r).$$

Ainsi, le critère (en coordonnées elliptiques) est vérifié et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(*ii*) Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{9x^2 + y^2}$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Au vu du dénominateur, on passe en coordonnées elliptiques.

$$\left(\frac{1}{3}r\cos\theta, r\sin\theta\right).$$

Étape 1 : Test des directions.

On calcule

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} f\left(\frac{1}{3}r\cos\theta, r\sin\theta\right) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{1}{9}r^2\cos^2\theta - \frac{1}{3}r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{9}\cos^2\theta - \frac{1}{3}\cos\theta\sin\theta \\
&= \frac{1}{9}\cos^2\theta - \frac{1}{3}\cos\theta\sin\theta.
\end{aligned}$$

Cette limite dépend de θ : si $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} f\left(\frac{1}{3}r\cos\theta_1, r\sin\theta_1\right) &= \frac{1}{9} \\
\lim_{r\to 0^+} f\left(\frac{1}{3}r\cos\theta_2, r\sin\theta_2\right) &= 0,
\end{aligned}$$

et donc la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

n'existe pas.

Exemple 3.17. (i) Soit $f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x}{8+\cos\left(\frac{1}{x^3+y^3}\right)}$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

On utilise les coordonnées polaires.
Étape 1 : Test des directions
On calcule

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta}{8+\cos\left(\frac{1}{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}\right)}$$

Remarquons à ce stade que vu que $\cos(...) \geq -1$, on a $8+\cos\left(\frac{1}{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}\right) \geq 7$. Ainsi, vu que le numérateur tend vers 0, on a que

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0,$$

qui ne dépend pas de θ et donc on choisit $l = 0$.
Étape 2 : Critère.
On a

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| = \frac{r|\cos\theta|}{8+\cos\left(\frac{1}{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}\right)} \leq \frac{1}{7}r^3.$$

Choisissant donc $\psi(r) = \frac{1}{7}r^3$, ψ vérifie les hypothèses du critère des deux gendarmes et on a bien que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Remarquons au passage que cette fonction est l'exemple parfait d'une fonction pour laquelle le critère des deux gendarmes en coordonnées cartésiennes fonctionne bien. On a

$$|f(x,y) - l| \leq \frac{|x|}{7}.$$

Choisissant $\varphi(x) = \frac{|x|}{7}$, on a le résultat voulu.

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}.$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Passons en coordonnées polaires.
Étape 1 : Test des directions.
On calcule

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}\end{aligned}$$

Si $\cos\theta = 0$, la limite donne 0 (le numérateur est nul). Si $\cos\theta \neq 0$, on obtient $\frac{0}{\cos^2\theta} = 0$. Ainsi, on a

$$\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0,$$

et on choisit $l = 0$.
Étape 2 : Critère.
On a

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| = \frac{r\cos^2\theta|\sin\theta|}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

On commence par estimer le dénominateur par le bas : Généralement dans ce genre de situation on utilise que $r^2\sin^4\theta \geq 0$. En effet, cette estimation est plus fine qu'utiliser $\cos^2\theta \geq 0$. Vu que $r \to 0$, on a $r^2\sin^4\theta \to 0$ et donc, si r est proche de 0, l'erreur qu'on introduit en utilisant $r^2\sin^4\theta \geq 0$ est petite. Tandis que si $\theta = 0$, par exemple, l'erreur qu'on introduit en utilisant $\cos^2\theta \geq 0$, on introduit une erreur de taille 1.
Ainsi, on a

$$\begin{aligned}|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| &= \frac{r\cos^2\theta|\sin\theta|}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta} \\ &\leq \frac{r\cos^2\theta|\sin\theta|}{\cos^2\theta} = r|\sin\theta| \leq r.\end{aligned}$$

Prenant $\psi(r) = r$, on a que le critère est vérifié et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(iii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$
Discutons la limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$
Passons en coordonnées polaires.
Étape 1 : Test des directions.
On calcule
$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta}\\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}\end{aligned}$$
Si $\cos\theta = 0$, la limite donne 0 (le numérateur est nul). Si $\cos\theta \neq 0$, on obtient $\frac{0}{\cos^2\theta} = 0$. Ainsi, on a
$$\lim_{r\to 0+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0,$$
et on choisit $l = 0$.
Étape 2 : Critère.
On a
$$\begin{aligned}|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| =& \frac{r|\cos\theta|\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}\\ \leq& \frac{r|\cos\theta|\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\ =& \frac{r\sin^2\theta}{|\cos\theta|},\end{aligned}$$
où on a utilisé la même estimation $\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta \geq \cos^2\theta$ qu'au point précédent. Problème ici : l'expression en θ, $\frac{\sin^2\theta}{|\cos\theta|}$ n'est pas bornée.
Si on utilise une autre estimation au dénominateur : $\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta \geq r^2\sin^4\theta$, on arrive à
$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| \leq \frac{|\cos\theta|}{r\sin^2\theta},$$
or l'expression ici est encore pire. Non seulement l'expression en θ, $\frac{|\cos\theta|}{\sin^2\theta}$ n'est pas bornée, mais en plus, si $\cos\theta \neq 0$, on a une expression en r^{-1} qui tend vers l'infini au lieu de tendre vers 0.
Étape 3 : Trouver une façon de s'approcher de $(0,0)$ qui donne un résultat différent. Quand on a un dénominateur avec des puisssances différentes sur x et y, un bonne chose est de commencer par essayer de s'approcher de $(0,0)$ en suivant une courbe de la forme (t^α, t^β) et de choisir α et β de telle sorte que la partie en x et en y ont la même puissance au dénominateur. Par exemple, ici, on veut que la puissance de $x^2 = t^{2\alpha}$ soit la même que $y^4 = t^{4\beta}$. Ainsi, choisir $\beta = 1$ et $\alpha = 2$, on aura que $2\alpha = 4\beta = 4$. On a alors,
$$\lim_{t\to 0} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}.$$
On obtient quelque chose de différent qu'au test des directions et donc la limite n'existe pas.

3.4 Techniques avancées pour les limites de fonctions à 2 variables

Proposition 3.18 (Utiliser les DLs pour trouver les bonnes estimations)**.**
Soit $k \geq 0$, et $f \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On note

$$p_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^k$$

le polynôme de Taylor d'ordre k de f. Alors, il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que pour tous $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$|f(x) - p_k(x)| \leq C|x - x_0|^{k+1}.$$

Pour la démonstration, voir page 102.

Exemple 3.19.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1 - e^{x^3}}{x^2 + y^2}.$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Étape 1 : Test des directions.
On a

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{1 - e^{r^3\cos^3\theta}}{r^2} \\
&\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{r\to 0^+} \frac{-3r^2\cos^3\theta e^{r^3\cos^3\theta}}{2r} \\
&= \lim_{r\to 0^+} -\frac{3}{2} r\cos^3\theta e^{r^3\cos^3\theta} = 0,
\end{aligned}$$

où on a utilisé la règle de Bernoulli-L'Hospital pour les fonctions $r \mapsto 1 - e^{r^3\cos^3\theta}$ et $r \mapsto r^2$. Ainsi, on choisit $l = 0$.
Étape 2 : Critère.
On a

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| = \frac{\left|1 - e^{r^3\cos^3\theta}\right|}{r^2}.$$

Il nous faut estimer ceci de façon indépendante de θ. Le problème vien de $\cos\theta$ qui est dans l'exponentielle. On peut, en utilisant la monotonie de l'exponentielle et le fait que $r \geq 0$ et $\cos\theta \leq 1$ pour avoir

$$\left|1 - e^{r^3\cos^3\theta}\right| = e^{r^3\cos^3\theta} - 1 \leq e^{r^3} - 1,$$

et on s'est débarrassé de θ. Une autre façon de faire, qui fonctionne mieux en général est de constater que 1 est le DL d'ordre 0 et e^z. Ainsi, par la proposition 3.18, page 102, on a qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|1 - e^z| \leq C|z|.$$

Ainsi,

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| \leq \frac{Cr^3|\cos^3\theta|}{r^2} = Cr\underbrace{|\cos^3\theta|}_{\leq 1} \leq Cr.$$

Choisissant $\psi(r) = Cr$, on a le résultat.

Proposition 3.20 (Bernoulli-L'Hospital dans le test des directions et le critère)**.**
Soient $R > 0$, $l \in \mathbb{R}$, $p_\theta, q_\theta\colon]0, R[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables qui dépendent d'un paramètre θ. Supposons que :

(i) Pour tout $r \in]0, R[$, et pour tout θ $q_\theta(r) \neq 0$ et $q'_\theta(r) \neq 0$

(ii) $\lim_{r\to 0^+} p_\theta(r) = \lim_{r\to 0^+} q_\theta(r) = 0$

(iii) Il existe $\Psi\colon]0, R[\to \mathbb{R}$ indépendante de θ telle que $\lim_{r\to 0^+} \Psi(r) = 0$ et pour tout $r \in]0, R[$ et tout θ,

$$\left|\frac{p'_\theta(r)}{q'_\theta(r)} - l\right| \leq \Psi(r)$$

Alors, il existe $\psi\colon]0, R[\to \mathbb{R}$ indépendante de θ telle que $\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$ et pour tout $r \in]0, R[$ et tout θ,

$$\left|\frac{p_\theta(r)}{q_\theta(r)} - l\right| \leq \psi(r)$$

Pour la démonstration, voir page 102.

Remarque 3.21. (i) L'idée de cette proposition est que si on est dans la situation où $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{p_\theta(r)}{p_\theta(r)}$ et qu'on utilise la règle de Bernoulli-L'Hospital pour calculer la limite quand $r \to 0^+$ alors on peut appliquer le critère des deux gendarmes à ce qu'on a *après* avoir fait B.H.

Attention néanmoins que comme pour B.H. dans $\mathbb{R}$ ceci ne fonctionne que si la conclusion est que la limite existe.

(ii) Au vu de la démonstration, on de plus que si Ψ est croissante, alors $\psi = \Psi$ fait l'affaire.

Exemple 3.22.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 + \log(1 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Discutons la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

Étape 1 : Test des directions.
On a

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0^+} & \frac{r^2\cos^2\theta + \log(1 + r^2\sin^2\theta)}{r} \\ \overset{\text{B.H.}}{=} & \frac{2r\cos^2\theta + \frac{2r\sin^2\theta}{1+r^2\sin^2\theta}}{1} \\ = & 2r\cos^2\theta + \frac{2r\sin^2\theta}{1 + r^2\sin^2\theta} = 0\end{aligned}$$

On choisit donc $l = 0$.
Étape 2 : Critère.
On utilise le critère, mais pour le rapport *après* avoir utilisé B.H. ci-dessus :

$$\begin{aligned}\left|2r\cos^2\theta + \frac{2r\sin^2\theta}{1+r^2\sin^2\theta} - 0\right| =& 2r\underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{1}{1+r^2\sin^2\theta}}_{\leq 1} 2r\underbrace{\sin^2\theta}_{\leq 1}\\ \leq& 4r.\end{aligned}$$

Prenant $\Psi(r) = 4r$, les hypothèses de la proposition 3.20, page 79 sont vérifiées pour $p_\theta(r) = r2\cos^2\theta + \log(1 + r^2\sin^2\theta)$ et $q_\theta(r) = r$, et donc le critère est vérifié.

Chapitre 4

Fonctions continues, dérivées partielles, fonctions différentiables

4.1 Fonctions Continues

Définition 4.1 (Fonction continue)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}^m$.

(i) Si $\tilde{x} \in D$ et f est définie au voisinage de $\tilde{x}$, on dit que f est *continue en* $\tilde{x}$ si $\lim_{x\to\tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$, ou de façon équivalente,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in B(\tilde{x},\delta),\ \|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \varepsilon$$

(ii) Si D est ouvert, on dit que f est *continue* si $\forall\tilde{x} \in D$, f est continue en $\tilde{x}$. On note alors $f \in C^0(D)$.

Remarque 4.2.
En utilisant le théorème 3.4, page 67, on a qu'une fonction $f = (f_1, ..., f_m)$ est continue en $\tilde{x}$ si et seulement si chaque composante f_i est continue.

Proposition 4.3 (Propriétés algébriques de la continuité)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in D$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ continues en $\tilde{x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Alors,

(i) $\|f\|$ *est continue en* $\tilde{x}$.

(ii) $(\alpha f + \beta g)$ *est continue en* $\tilde{x}$.

(iii) $\langle f, g\rangle$ *est continue en* $\tilde{x}$.

(iv) $d(f, g)$ *est continue en* $\tilde{x}$.

(v) si $m = 1$, fg *est continue en* $\tilde{x}$.

(vi) si $m = 1$ *et* $g(\tilde{x}) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *est continue en* $\tilde{x}$.

Pour la démonstration, voir page 102.

Proposition 4.4 (Caractérisation topologique des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f *est continue.*

(ii) $\forall O \subset \mathbb{R}$ *ensemble ouvert,* $f^{-1}(O) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ f(x) \in O\}$ *est ouvert.*

(iii) $\forall F \subset \mathbb{R}$ *ensemble fermé,* $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ f(x) \in F\}$ *est fermé.*

Pour la démonstration, voir page 103.

Remarque 4.5.
Cette caractérisation justifie la remarque 2.10 (*iii*), (*iv*), page 49. En effet, si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) > a\} = f^{-1}\,(\underbrace{]a, +\infty[}_{\text{ouvert}}) \quad \text{est ouvert.}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) < a\} = f^{-1}\,(\underbrace{]-\infty, a[}_{\text{ouvert}}) \quad \text{est ouvert.}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \neq a\} = f^{-1}\,(\underbrace{\mathbb{R}\backslash\{a\}}_{\text{ouvert}}) \quad \text{est ouvert.}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \geq a\} = f^{-1}\,(\underbrace{[a, +\infty[}_{\text{fermé}}) \quad \text{est fermé.}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \leq a\} = f^{-1}\,(\underbrace{]-\infty, a]}_{\text{fermé}}) \quad \text{est fermé.}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = a\} = f^{-1}\,(\underbrace{\{a\}}_{\text{fermé}}) \quad \text{est fermé.}$$

On obtient le résultat plus général par le fait que l'intersection finie d'ouverts est ouverte, et l'intersection finie de fermés est fermée.

4.2 Dérivées partielles et fonctions différentiables (fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$)

Définition 4.6 (Dérivées partielles, dérivées directionnelles, gradient)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $\tilde{x}$.

(*i*) pour $1 \leq i \leq n$, la *dérivée partielle* de f par rapport à x_i en $\tilde{x}$ est la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i + t, \tilde{x}_{i+1}, ..., \tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) - f(\tilde{x})}{t},$$

si elle existe.
On note alors cette limite $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x})$.

(*ii*) pour $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$, on définit la *dérivée directionnelle* de f suivant v en $\tilde{x}$ par

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\tilde{x} + tv) - f(\tilde{x})}{t},$$

si la limite existe.
On note alors cette limite $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x})$.

(*iii*) Si toutes les dérivées partialles de f existe en $\tilde{x}$, i.e. si la dérivée partielle de f par rapport à chacune de ses variables existe en $\tilde{x}$, on définit le *gradient* de f, noté $\nabla f(\tilde{x})$ par

$$\nabla f(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x})\right)$$

Remarque 4.7. *(i)* Si e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$e_i = (0, ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ème}} \text{ composante}}}{1}, 0, ..., 0)$$

alors, la dérivée partielle de f par rapport à x_i existe si et seulement si la dérivée directionnelle de f suivant e_i existe. En effet, pour $v = e_i$, les limites calculées dans ces deux définitions sont les mêmes.

(ii) Contrairement à l'intuition qui découle de l'analyse I, le fait que les dérivées partielles existent n'implique pas que f est continue.

(iii) Si $\varphi(t) = f(\tilde{x} + tv)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}) = \varphi'(0).$$

Exemple 4.8. *(i)* Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2 + x - 3y + 5xy + x^2$.
Pour calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, on traite y comme une constante, et on dérive par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 5y + 2x,$$

et pour calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$, on traite x comme une constante, et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3 + 5x.$$

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On a vu précédemment que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas et donc, f ne peut pas être continue en $(0, 0)$. Regardons pour quels $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\| = 1$, la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ existe. On a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^2 v_1 v_2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} v_1 v_2. \end{aligned}$$

On voit que si $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$ cette limite n'existe pas. Et donc la dérivée directionnelle de f n'existe que le long des directions $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ (et vaut toujours 0.)

En particulier, les dérivées partielles de f existent en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial (1, 0)}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial (0, 1)}(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

(iii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a vu précédemment que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ n'existe pas, donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Regardons pour quels $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\| = 1$, la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existe. On a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t v_2^2}. \end{aligned}$$

Si $v_1 = 0$, alors, on obtient

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{t v_2^4} = 0.$$

et si $v_1 \neq 0$, on obtient

$$\lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t v_2^2} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1}.$$

En particulier, quel que soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\| = 1$, la dérivée directionnelle de f suivant la direction v existe en $(0,0)$ malgré le fait que f n'est pas continue en $(0,0)$.

En particulier, les dérivées partielles existent en $(0,0)$, et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial (1,0)}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial (0,1)}(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Proposition 4.9 (Propriétés algébriques de la dérivée partielle)**.**
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} \in D$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ telles que la dérivée partielle de f et g par rapport à x_i existent en $\tilde{x}$.
Alors,

(i) $\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\alpha f + \beta g\right](\tilde{x}) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x})$.

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_i}\left[fg\right](\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) g(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x})$.

(iii) si $g(\tilde{x}) \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f}{g}\right](\tilde{x}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}) g(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{x})}{g(\tilde{x})^2}$.

Pour la démonstration, voir page 103.

Notation 4.10 (Dérivées d'ordre supérieur)**.**
On écrit les dérivées partielles d'ordre 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}(x) \qquad \text{(dérivée d'abord par rapport à } x_j \text{ puis } x_i\text{)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_i}(x) \qquad \text{(dérivée deux fois par rapport à } x_i\text{),} \end{aligned}$$

les dérivées partielles d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x) =& \frac{\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}}{\partial x_i}(x) && \left(\begin{array}{l}\text{dérivée d'abord par rapport à } x_k,\\ \text{puis } x_j, \text{ puis } x_i\end{array}\right)\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(x) =& \frac{\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}{\partial x_i}(x) && \left(\begin{array}{l}\text{dérivée d'abord par rapport à } x_j,\\ \text{puis 2 fois par rapport à } x_i\end{array}\right)\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}(x) =& \frac{\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}{\partial x_i}(x) && \left(\begin{array}{l}\text{dérivée d'abord 2 fois par rapport à } x_j,\\ \text{puis par rapport à } x_i\end{array}\right)\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(x) =& \frac{\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}}{\partial x_i}(x) && (\text{dérivée 3 fois par rapport à } x_i)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Exemple 4.11. (i) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^x \cos(x+y)$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\left[e^x \cos(x+y)\right] = e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial y}\left[e^x \cos(x+y)\right] = -e^x \sin(x+y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y)\right]\\
=& e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y) - e^x \sin(x+y) - e^x \cos(x+y)\\
=& -2e^x \sin(x+y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^x \cos(x+y) - e^x \sin(x+y)\right]\\
=& -e^x \sin(x+y) - e^x \cos(x+y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\left[-e^x \sin(x+y)\right] = -e^x \sin(x+y) - e^x \cos(x+y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =& \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[-e^x \sin(x+y)\right] = -e^x \cos(x+y)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

Alors, pour $(x, y) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ =& y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 4xy\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t(0^4-4\cdot 0^4\cdot t^2-t^4)}{(0^2+t^2)^2}-0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} -1 = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t(t^4-4\cdot t^2\cdot 0^2-0^4)}{(0^2+t^2)^2}-0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 1 = 1\end{aligned}$$

On voit ici un exemple où $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Définition 4.12 (Différentiable)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$.

(i) Si $\tilde{x} \in D$, f est définie au voisinage de $\tilde{x}$ et pour tout $i = 1, ..., n$ la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x})$ existe, on dit que f est *différentiable en* $\tilde{x}$ si

$$\lim_{h\to(0,\ldots,0)}\frac{f(\tilde{x}+h)-f(\tilde{x})-\langle\nabla f(\tilde{x}),h\rangle}{\|h\|} = 0.$$

(ii) Supposons de plus que D est ouvert. On dit que f est *différentiable* si pour tout $\tilde{x} \in D$, f est différentiable en $\tilde{x}$.

Remarque 4.13.
La définition de différentiable est équivalente à l'existence d'un développement limité d'ordre 1. En réécrivant la définition pour $n = 1$ on obtient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\tilde{x}+h)-f(\tilde{x})-f'(\tilde{x})h}{h} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\tilde{x}+h) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})h + o(|x|).$$

Pour $n = 1$, l'existence du développement limité d'ordre 1 est équivalent à l'existence de la dérivée en $\tilde{x}$. (Voir *Analyse I pour section d'ingénierie*, Théorème 8.1, `https://sma.epfl.ch/~struett/analyse1/main_proofs_at_the_end`.)

Dès que $n \geq 2$, l'existence du développement limité d'ordre 1 n'est plus équivalente à la simple existence des dérivées partielles. On verra des fonctions pour lesquelles les dérivées partielles existent, mais la fonction n'est pas différentiable.

Théorème 4.14.
Soit $\tilde{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, $f \colon D \to \mathbb{R}$ différentiable en $\tilde{x}$. Alors,

(i) f est continue en $\tilde{x}$.

(ii) $\forall v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x}) = \langle \nabla f(\tilde{x}); v \rangle .$$

Pour la démonstration, voir page 103.

Définition 4.15 ($C^k(D)$)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On note

$$C^k(D) = \left\{ f \colon D \to \mathbb{R} \ : \ \begin{array}{l} \text{toutes les dérivées d'ordre } k \text{ de } f \\ \text{existent et sont continues} \end{array} \right\}$$

$$C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(D)$$

Proposition 4.16.
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(D)$. Alors, f est différentiable.

Pour la démonstration, voir page 103.

Méthode 4.17 (Déterminer si une fonction est différentiable)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $\tilde{x}$.
Pour déterminer si f est différentiable en $\tilde{x}$, on procède de la façon suivante :
Étape 1 : Calcul des dérivées partielles.
On calcule les dérivées partielles de f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x})$. Si une de ces dérivées partielles n'existe pas, la fonction n'est pas différentiable. Si elles existent toutes, on passe à l'étape suivante.
Étape 2 : Étude de la limite

$$\lim_{h \to (0,...,0)} \frac{f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) - \langle \nabla f(\tilde{x}), h \rangle}{\|h\|}$$

en utilisant les méthodes du chapitre 3.
Si la limite n'existe pas, la fonction n'est pas différentiable.
Si

$$\lim_{h \to (0,...,0)} \frac{f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) - \langle \nabla f(\tilde{x}), h \rangle}{\|h\|} = 0,$$

la fonction est différentiable.
Si la limite

$$\lim_{h \to (0,...,0)} \frac{f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) - \langle \nabla f(\tilde{x}), h \rangle}{\|h\|}$$

existe mais est non-nulle, il y a une erreur de calcul.
Raccourcis :

— Si f n'est pas continue, f n'est pas différentiable.

— Si f est C^1, f est différentiable.

Exemple 4.18. (i) Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + xy$. Cette fonction est combinaison de fonctions usuelles sans problème de définition, donc $f \in C^1$ et donc elle est différentiable.

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Déterminons si f est différentiable en $(0,0)$.

Étape 1 : Calcul des dérivées partielles.

On a,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cdot 0}{t^2+0} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t^2}{0+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Étape 2 : Étude de la limite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h_1,h_2)\rangle}{\|(h_1,h_2)\|}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - 0 - \langle (0,0), (h_1,h_2)\rangle}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Étape 2.1 : Test des directions.

Passons en coordonnées polaires $(h_1,h_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et calculons

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta}{r^3} = r\cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

Étape 2.2 : Critère.

On a

$$\left| \frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta}{r^3} - 0 \right| = r \underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1} \underbrace{\sin^2\theta}_{\leq 1} \leq r.$$

Choisissant $\psi(r) = r$, les hypothèses du critère des deux gendarmes sont vérifiées et la limite est bien 0.

On conclut donc que f est différentiable en $(0,0)$.

(iii) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y & \text{si } x \neq 0 \\ \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminons si f est différentiable en $(0,0)$.
Étape 1 : Calcul des dérivées partielles.
On a,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) + 0 - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = 1$$

Étape 2 : Étude de la limite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h_1,h_2)\rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - 0 - \langle (0,1), (h_1,h_2)\rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

On a

$$\frac{f(h_1,h_2) - h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \begin{cases} \dfrac{h_1^2 \sin\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2 - h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} & \text{si } h_1 \neq 0 \\ \\ \dfrac{h_2 - h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} & \text{si } h_1 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h_1^2 \sin\left(\frac{1}{h_1}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} & \text{si } h_1 \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } h_1 = 0 \end{cases}$$

Étape 2.1 : Test des directions.
Passons en coordonnées polaires : $(h_1,h_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Si $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ pour que $h_1 \neq 0$, on a

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta}{r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta \sin\left(\frac{1}{r\cos\theta}\right)}{r}$$
$$= \lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta \sin\left(\frac{1}{r\cos\theta}\right) = 0.$$

Étape 2.2 : Critère.

On a

$$\left|\frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta}{r} - 0\right| = r\underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1}\underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{r\cos\theta}\right)\right|}_{\leq 1} \leq r.$$

Prenant $\psi(r) = r$, les hypothèses du critère des deux gendarmes en coordonnées polaires sont vérifiées et on a que f est différentiable.

Annexe A

Techniques de paramétrisation de courbes

Méthode A.1 (Inversion d'orientation)**.**
Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe de paramétrisation $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
Alors, la paramétrisation $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$$

paramétrise la même courbe, mais avec l'orientation opposée. En effet, on a

$$\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a+b-a) = \gamma(b) \qquad \tilde{\gamma}(b) = \gamma(a+b-b) = \gamma(a).$$

Méthode A.2 (Concaténation de courbes)**.**
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux courbes de paramétrisations $\gamma_1\colon [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2\colon [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^n$ telles que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ (le point final de γ_1 est le point de départ de γ_2). Alors, $\gamma\colon [a_1, b_1+b_2-a_2] \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a_1,b_1] \\ \\ \gamma_2(t-b_1+a_2) & \text{si } t \in]b_1, b_1+b_2-a_2] \end{cases}$$

est une paramétrisation de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
Si de plus γ_1, γ_2 sont régulières et $\gamma_1'(b_1) = \gamma_2'(a_2)$, alors γ est régulière.

Exemple A.3.
Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 = 2, \ y \geq 0\}$.
On donne trois méthodes pour trouver une paramétrisation :
Méthode 1 : Repérer les symétries et faire un changement de coordonnées.
Le terme x^2+y^2 pout nous mener à penser qu'un passage aux coordonnées polaires peut aider. Si on écrit $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0,2\pi]$, les conditions $x^2+y^2 = 2$ et $y \geq 0$ s'écrivent

$$r^2 = 2, \ \sin(\theta) \geq 0.$$

Ce qui nous mène à $r = \sqrt{2}$ et $\theta \in [0,\pi]$. On arrive donc à la paramétrisation (θ qui peut prendre des valeurs dans un intervalle devient t, l'intervalle pour θ devient le domaine de la paramétrisation, r qui est fixé à $\sqrt{2}$ disparaît) $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t)).$$

Méthode 2 : Résoudre les équations pour $y = \gamma_2(t)$ et prendre $x = \gamma_1(t) = t$.
On a

$$x^2 + y^2 = 2, \; y \geq 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2 - x^2}.$$

La question qu'on se pose ici est pour quels x l'expression $\sqrt{2-x^2}$ a un sens ? L'expression a un sens pour $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. On arrive donc à la paramétrisation $\gamma \colon [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{2 - t^2}).$$

Méthode 3 : Résoudre les équations pour $x = \gamma_1(t)$ et prendre $y = \gamma_2(t) = t$.
On a

$$x^2 + y^2 = 2, \; y \geq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2 - y^2}, \; y \geq 0.$$

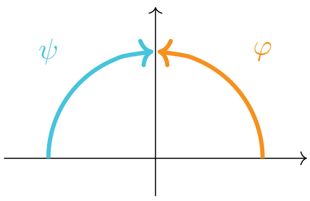
Deux questions à se poser :

— Comment traiter $\pm$? En considérant deux courbes (une pour $+$ et une pour $-$.)

— Pour quels y l'expression $\sqrt{2-y^2}$ a un sens ? (pour $y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, ce qui ensemble avec la condition $y \geq 0$ donne $y \in [0, \sqrt{2}]$).

On considère donc deux courbes :

$$\begin{aligned} \varphi(t) =& (\sqrt{2-t^2}, t) \qquad t \in [0, \sqrt{2}], \\ \psi(t) =& (-\sqrt{2-t^2}, t) \qquad t \in [0, \sqrt{2}]. \end{aligned}$$



Maintenant qu'on a ces deux courbes, on veut les mettre ensemble (à l'aide d'une concaténation) pour n'en avoir qu'une seule. Néanmoins, en testant les points de départ et d'arrivée respectifs, on a

$$\begin{aligned} \varphi(0) =& (\sqrt{2}, 0), \qquad \varphi(\sqrt{2}) = (0, \sqrt{2}) \\ \psi(0) =& (-\sqrt{2}, 0), \qquad \psi(\sqrt{2}) = (0, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

et donc le point de départ de l'une n'est pas le point d'arrivée de l'autre.
Néanmoins, elles ont le même point final ; si on inverse l'orientation d'une de ces deux courbes, elle aura le même point de départ que le point d'arrivée de l'autre.
On change l'orientation de φ (on peut aussi changer l'orientation de ψ, les calculs sont similaires).
Conformément à la méthode A.1, page 91, on cosidère $\tilde{\varphi} \colon [0\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sqrt{2} - t).$$

On a maintenant $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(\sqrt{2}) = (0, \sqrt{2}) = \psi(\sqrt{2})$. On peut maintenant procéder à la concaténation de nos deux courbes. Conformément à la méthode A.2, page 91, on considère

$\gamma\colon [0, 2\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in [0, \sqrt{2}] \\ \tilde{\varphi}(t - \sqrt{2}) & \text{si } t \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]. \end{cases} = \begin{cases} (-\sqrt{2 - t^2}, t) & \text{si } t \in [0, \sqrt{2}] \\ \varphi(2\sqrt{2} - t) & \text{si } t \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-\sqrt{2 - t^2}, t) & \text{si } t \in [0, \sqrt{2}] \\ \left(\sqrt{2 - \left(2\sqrt{2} - t\right)^2}, 2\sqrt{2} - t\right) & \text{si } t \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]. \end{cases}$$

En conclusion, on voit qu'en fonction de la courbe, certaines techniques donnent moins de travail. Comment choisir la méthode vient avec l'expérience.

Annexe B

Démonstrations

Démonstrations du chapitre 1

Démonstration de la proposition 1.32 *(page 21).*
On a

$$\begin{aligned} y' + p(x)y =& (y_1 + y_2)' + p(y_1 + y_2) = y_1' + y_2' + py_1 + py_2 \\ =& \underbrace{y_1' + py_1}_{=q_1} + \underbrace{y_2' + py_2}_{=q_2}, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu. $\square$

Démonstration de la proposition 1.37 *(page 24).*

(*i*) Commençons par montrer que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'EDO. Posons $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors, on a pour $i = 1, 2$, $a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c = 0$ et $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} y_i(x) =& e^{\lambda_i x} \\ y_i'(x) =& \lambda_i e^{\lambda_i x} \\ y_i''(x) =& \lambda_i^2 e^{\lambda_i x} \\ & \Rightarrow a y_i''(x) + b y_i'(x) + c y_i(x) = \underbrace{(a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c)}_{=0} e^{\lambda_i x} = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène.
Montrons maintenant que les deux solutions sont linéairement indépendantes. Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0.$$

Ainsi, on a

$$0 = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \alpha e^{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}x} + \beta e^{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}x} = e^{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}x}\left(\alpha e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}x} + \beta\right)$$

Or, vu que $e^{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}x} \neq 0$, on déduit que

$$0 = \alpha e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}x} + \beta$$

En dérivant des deux côtés de l'équation par rapport à x, on arrive à

$$0 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}\alpha e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}x}.$$

Vu que $\sqrt{\Delta} \neq 0$ et $e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{a}x} \neq 0$, on déduit $\alpha = 0$, et en injectant ceci dans $0 = \alpha e^{\sqrt{\Delta}x} + \beta$, on déduit que $\beta = 0$. Ainsi, on a bien que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

(ii) Commençons par montrer que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'EDO. Remarquons que par hypothèse, $b^2 = 4ac$ et $-\frac{b}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ est la racine double de $a\lambda^2 + b\lambda + c$, c'est-à-dire,

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^{\frac{-b}{2a}x} \\ y_2(x) =& xe^{\frac{-b}{2a}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'(x) =& -\frac{b}{2a}e^{\frac{-b}{2a}x} \\ y_2'(x) =& \left(1 - x\frac{b}{2a}\right)e^{\frac{-b}{2a}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1''(x) =& \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 e^{\frac{-b}{2a}x} \\ y_2''(x) =& \left(-\frac{b}{a} + x\frac{b^2}{4a^2}\right)e^{\frac{-b}{2a}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x) =& \quad \underbrace{\left(a\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2}\right) + c\right)}_{=0} e^{\frac{-b}{2}x} = 0 \\ \Rightarrow ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) =& \quad x\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)e^{\frac{-b}{2a}x} + (b-b)e^{\frac{-b}{2a}x} \\ & \overset{b^2=4ac}{=} x(c-c)e^{\frac{-b}{2a}x} = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène.
Montrons maintenant que les deux solutions sont linéairement indépendantes. Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \alpha e^{\frac{-b}{2a}x} + \beta xe^{\frac{-b}{2a}x}.$$

En particulier, pour $x = 0$, on déduit

$$0 = \alpha e^{\frac{-b}{2a}0} + \beta \cdot 0 \cdot e^{\frac{-b}{2a}0} = \alpha.$$

De plus, pour $x = 1$, on déduit

$$0 = \beta e^{\frac{-b}{2a}}.$$

Pour finir, vu que $e^{\frac{-b}{2a}} \neq 0$, on déduit que $\beta = 0$. Ainsi, on a bien que y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes.

(iii) Commençons par montrer que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'EDO. On a

$$\begin{aligned} y_1(x) =& e^{\frac{-b}{2a}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) \\ y_2(x) =& e^{\frac{-b}{2a}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) - \frac{b}{2a}\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)\right)e^{\frac{-b}{2a}x} \\ y_2'(x) &= \left(-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) - \frac{b}{2a}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)\right)e^{\frac{-b}{2a}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= \left(\frac{-b\sqrt{4ac-b^2}}{2a^2}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\sin\left(\frac{4ac-b^2}{2a}x\right)\right)e^{\frac{-b}{2a}x} \\ y_2''(x) &= \left(\frac{b\sqrt{4ac-b^2}}{2a^2}\sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\cos\left(\frac{4ac-b^2}{2a}x\right)\right)e^{\frac{-b}{2a}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a y_1''(x) + b y_1'(x) + c y_1(x) = 0 \\ &\Rightarrow a y_2''(x) + b y_2'(x) + c y_2(x) = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation homogène.
Montrons maintenant que les deux solutions sont linéairement indépendantes. Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \alpha e^{\frac{-b}{2a}x}\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x\right) + \beta e^{\frac{-b}{2a}x}\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}x\right).$$

En particulier pour $x = 0$, on déduit

$$0 = \alpha e^0 \sin(0) + \beta e^0 \cos(0) = \beta.$$

De plus, pour $x = \frac{a\pi}{\sqrt{|\Delta|}}$, on déduit

$$0 = \alpha e^{-\frac{b\pi}{2\sqrt{|\Delta|}}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha e^{-\frac{b\pi}{2\sqrt{|\Delta|}}}.$$

Pour finir, vu que $e^{-\frac{b\pi}{2\sqrt{|\Delta|}}} \neq 0$, on déduit que $\alpha = 0$. Ainsi, on a bien que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

□

Démonstration de la proposition 1.42 *(page 27).*

(*i*) *Étape 1* : On montre que $W[y_1, y_2](x)$ est une solution de l'EDO du premier ordre homogène à coefficient constants $y' + \frac{b}{a}y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2]'(x) =& y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) \\ =& y_1(x)\left(-\frac{b}{a}y_2'(x) - \frac{c}{a}y_2(x)\right) - \left(-\frac{b}{a}y_1'(x) - \frac{c}{a}y_1(x)\right)y_2(x) \\ =& -\frac{b}{a}\left(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right) = -\frac{b}{a}W[y_1, y_2](x). \end{aligned}$$

et donc

$$W[y_1, y_2]'(x) + \frac{b}{a}W[y_1, y_2](x) = 0,$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.

Étape 2 : On montre qu'il existe C tel que $W[y_1, y_2](x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$

On montre que toutes les solutions de $y' + \frac{b}{a}y = 0$ ont la forme $y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$ en utilisant la méthode du facteur intégrant. Vu que $W[y_1, y_2]$ est une solution de $y' + \frac{b}{a}y = 0$, on aura le résultat.

Si $y \in C^1(I)$ est une solution de $y' + \frac{b}{a}y = 0$, on a

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{b}{a}y(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{b}{a}x}y'(x) + \frac{b}{a}e^{\frac{b}{a}x}y(x) = 0 \Rightarrow \left(e^{\frac{b}{a}x}y(x)\right)' = 0 \\ \Rightarrow e^{\frac{b}{a}x}y(x) = C \Rightarrow y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.

Étape 3 : Conclusion

Vu que $W[y_1, y_2](x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$, on a soit $C \neq 0$ et $\forall x \in I$, $W[y_1, y_2](x) \neq 0$, soit $C = 0$ et alors $\forall x \in I$, $W[y_1, y_2](x) = 0$.

(*ii*) *Étape 1* : On montre que si y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, alors $\forall x \in I$, $W[y_1, y_2](x) = 0$.

Si y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pas tous deux nuls tel que pour tout $x \in I$, $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$. Supposons, quitte à échanger les rôles de y_1 et y_2 que $\beta \neq 0$. On a alors pour tout $x \in I$, $y_2(x) = -\frac{\alpha}{\beta}y_1(x)$. Donc pour tout $x \in I$,

$$W[y_1, y_2](x) = y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = y_1'(x)\left(-\frac{\alpha}{\beta}y_1(x)\right) - y_1(x)\left(-\frac{\alpha}{\beta}y_1'(x)\right) = 0,$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.

Étape 2 : On montre que si $\exists \overline{x} \in I$ tel que $W[y_1, y_2](\overline{x}) = 0$, alors y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

Attention cette étape requiert un résultat qui est démontré plus loin. On utilise l'aspect unicité du théorème Hyppocampéléphantocamelos.

Vu que $W[y_1, y_2](\overline{x}) \neq 0$, le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} y_1(\overline{x}) & y_2(\overline{x}) \\ y_1'(\overline{x}) & y_2'(\overline{x}) \end{pmatrix}$ n'est pas trivial. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pas tous deux nuls tels que

$$\begin{pmatrix} y_1(\overline{x}) & y_2(\overline{x}) \\ y_1'(\overline{x}) & y_2'(\overline{x}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant le système d'EDOs

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

avec la condition initiale $\begin{pmatrix} u_1(\overline{x}) \\ u_2(\overline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Posons

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \\ \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) \end{pmatrix},$$

et montrons que c'est une solution du sytème d'EDOs. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) \\ \alpha y_1''(x) + \beta y_2''(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2(x) \\ \alpha\left(-\frac{b}{a} y_1'(x) - \frac{c}{a} y_1(x)\right) + \beta\left(-\frac{b}{a} y_2'(x) - \frac{c}{a} y_2(x)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2(x) \\ -\frac{b}{a}(\alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x)) - \frac{c}{a}(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2(x) \\ -\frac{b}{a} u_2(x) - \frac{c}{a} u_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour finir, vérifions que cette solution vérifie également la condition initiale :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_1(\overline{x}) \\ u_2(\overline{x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha y_1(\overline{x}) + \beta y_2(\overline{x}) \\ \alpha y_1'(\overline{x}) + \beta y_2'(\overline{x}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_1(\overline{x}) & y_2(\overline{x}) \\ y_1'(\overline{x}) & y_2'(\overline{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Enfin, remarquons que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est également une solution du système d'EDOs avec la condition initiale. Par unicité des solutions (voir théorème Hyppocampéléphantocamelos), on a nécessairement que pour tout $x \in I$,

$$\begin{pmatrix} \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \\ \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en particulier, pour tout $x \in I$, $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$ qui est le résultat voulu.

□

Démonstration de la proposition 1.50 *(page 37).*

On a

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy =& a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) \\
=& \underbrace{ay_1'' + by_1' + cy_1}_{=q_1} + \underbrace{ay_2'' + by_2' + cy_2}_{=q_2},
\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu. □

Démonstration du théorème 1.53 *(page 40).*
Hyppocampéléphantocamelos

□

Démonstrations du chapitre 2

Démonstration de la proposition 2.2 *(page 44).*

On a pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$|x_i| = \sqrt{|x_i|^2} \leq \sqrt{|x_i|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} |x_j|^2 + \sum_{j=i+1}^{n} |x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|$$

où on a utilisé que les deux sommes qui apparaissent sont positives car sommes de termes positifs.
De plus,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i||x_j| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} |x_i||x_j| + \sum_{j=i+1}^{n} |x_i||x_j|\right) \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|^2 .\end{aligned}$$

Pour finir, en prenant la racine, on arrive à

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

ce qui montre le résultat de cette partie.

□

Démonstration de la proposition 2.8 *(page 46).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Détails de l'exemple 2.13 *(page 50).*

(i) Montrons que

$$\partial B(a,R)) = \partial \overline{B}(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a - x\| = R\} .$$

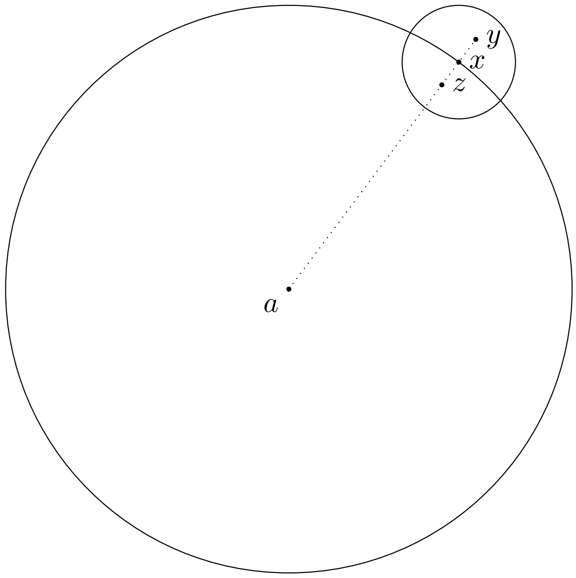
On commence par montrer que

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a - x\| = R\} \subset \partial B(a,R) \\ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a - x\| = R\} \subset \partial \overline{B}(a,R)\end{aligned}$$

Soit $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a - x\| = R\}$ quelconque. On doit montrer que pour tout $r > 0$, et pour $E = B(a,R)$ ou $E = \overline{B}(a,R)$.

$$B(x,r) \cap E \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \cap [\mathbb{R}^n \backslash E] \neq \emptyset$$

Soit donc $r > 0$ quelconque. Sans perte de généralité, supposons que $r < R$. Posons $y = x + \frac{r}{2R}(x - a)$ et $z = x - \frac{r}{2R}(x - a)$.



On a alors

$$\begin{aligned}\|y-x\| &= \left\|x+\frac{r}{2R}(x-a)-x\right\| = \frac{r}{2R}\|x-a\| = \frac{r}{2} < r\\ \|z-x\| &= \left\|x-\frac{r}{2R}(x-a)-x\right\| = \frac{r}{2R}\|x-a\| = \frac{r}{2} < r,\end{aligned}$$

d'où, $y, z \in b(x,r)$. De plus,

$$\begin{aligned}\|y-a\| &= \left\|x+\frac{r}{2R}(x-a)-a\right\| = \left\|\left(1+\frac{r}{2R}\right)(x-a)\right\|\\ &= \left(1+\frac{r}{2R}\right)\|x-a\| = R+\frac{r}{2} > R\\ \|z-a\| &= \left\|x-\frac{r}{2R}(x-a)-a\right\| = \left\|\left(1-\frac{r}{2R}\right)(x-a)\right\|\\ &= \left|1-\frac{r}{2R}\right|\|x-a\| \overset{r\leq R}{=} \left(1-\frac{r}{2R}\right)R = R-\frac{r}{2} < R\end{aligned}$$

d'où, $y \in E$ et $z \in \mathbb{R}^n \backslash E$. Ainsi,

$$\begin{aligned}&y \in B(x,r) \cap E \neq \emptyset\\ &z \in B(x,r) \cap [\mathbb{R}^n \backslash E] \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Ceci montre bien

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a-x\| = R\} \subset \partial B(a,R)\\ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a-x\| = R\} \subset \partial \overline{B}(a,R)\end{aligned}$$

Pour montrer l'inclusion inverse

$$\begin{aligned}\partial B(a,R) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a-x\| = R\}\\ \partial \overline{B}(a,R) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|a-x\| = R\}\end{aligned}$$

on procède par contraposée ; à la place de montrer que $x \in \partial B(a,R) \Rightarrow x \in \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x-a\| = R\}$, on montre que $x \notin \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x-a\| = R\} \Rightarrow x \notin \partial B(a,r)$.

Si $x \notin \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x-a\| = R\}$, alors $\|x-a\| \neq R$ on distingue deux cas :
Cas 1 : $\|x-a\| < R$. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{R}^n \backslash [B(a,R)] \cap B(x,r) = \emptyset$.
Soit $r = R - \|x-a\| > 0$. Alors, si $y \in B(x,r)$ est quelconque, on a

$$\|y-a\| \leq \|x-a\| + \|y-x\| < \|x-a\| + r = \|x-a\| + R - \|x-a\| = R,$$

et donc $y \in B(a,R)$ et $y \notin \mathbb{R}^n \backslash [B(a,R)]$.
Cas 2 : $\|x-a\| > R$. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a,R) \cap B(x,r) = \emptyset$.
Soit $r = \|x-a\| - R > 0$. Alors, si $y \in B(x,r)$ est quelconque, on a

$$\begin{aligned}\|y-a\| \geq & |\|x-a\| - \|y-x\|| \geq \|x-a\| - \|y-x\| > \|x-a\| - r \\ =& \|x-a\| - (\|x-a\| - R)) = R.\end{aligned}$$

et donc $y \in \mathbb{R}^n \backslash [B(a,R)]$ et $y \notin B(a,R)$.
Remarquons que exactement les mêmes arguments fonctionnent pour $\overline{B}(a,R)$. Ainsi, on a le résultat.

(*iii*) Hyppocampéléphantocamelos

Démonstration du théorème 2.20 *(page 55).*

Hyppocampéléphantocamelos

□

Démonstration du théorème 2.23 *(page 56).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstration du théorème 2.29 *(page 59).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstration du théorème 2.32 *(page 60).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstrations du chapitre 3

Démonstration du théorème 3.8 *(page 70).*

Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstration du théorème 3.9 *(page 70).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstration du théorème 3.12 *(page 72).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstration du théorème 3.13 *(page 73).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstration du théorème 3.14 *(page 73).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Démonstration de la proposition 3.18 *(page 78).*

Hyppocampéléphantocamelos $\square$

Démonstration de la proposition 3.20 *(page 79).*

Étape 1 : On construit $\psi\colon]0,R[\to \mathbb{R}$ croissante, qui vérifie les mêmes hypothèses que Ψ dans l'énoncé.
Soit $\psi\colon]0,R[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(r) = \sup\{\Psi(t) \ : \ t \in]0,r]\}.$$

Cette nouvelle fonction ψ est indépendante de θ, croissante (par monotonie du suprémum) et vu que $\Psi(r) \in \{\Psi(t) \ : \ t \in]0,r]\}$, on a

$$\left|\frac{p'_\theta(r)}{q'_\theta(r)} - l\right| \leq \Psi(r) \leq \psi(r).$$

Il nous reste à montrer que $\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$. Par définition de $\lim_{r\to 0^+} \Psi(r) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in]0,\delta[$, $0 \leq \Psi(r) \leq \varepsilon$.
Soit $r \in]0,\delta]$ quelconque. Alors, pour tout $t \in]0,r]$, on a $t \in]0,\delta]$ et donc $\Psi(t) \leq \varepsilon$. On a donc

$$0 \leq \psi(r) = \sup\{\Psi(t) \ : \ t \in]0,r]\} \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.
Étape 2 : Conclusion.
Définissons $\tilde{p}_\theta, \tilde{q}_\theta\colon [0,R] \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{p}_\theta(r) = \begin{cases} p_\theta(r) & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \end{cases} \qquad \tilde{q}_\theta(r) = \begin{cases} q_\theta(r) & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

qui sont des fonctions continues sur $[0,R[$ et dérivables sur $]0,R[$.
Soit $r \in [0,R[$ et θ quelconques. Vu que $\tilde{p}_\theta$ et $\tilde{q}_\theta$ sont continues sur $[0,r]$ et dérivables sur $]0,r[$, on a par le théorèmes des accroissements finis généralisé qu'il existe $\overline{t}_{r,\theta} \in]0,r[$ tel que

$$\frac{p_\theta(r)}{q_\theta(r)} = \frac{p_\theta(r) - 0}{q_\theta(r) - 0} = \frac{\tilde{p}_\theta(r) - \tilde{p}_\theta(0)}{\tilde{q}_\theta(r) - \tilde{q}_\theta(0)} = \frac{\tilde{p}'_\theta(t_{r,\theta})}{\tilde{q}'_\theta(t_{r,\theta})} = \frac{p'_\theta(t_{r,\theta})}{q'_\theta(t_{r,\theta})}.$$

Ainsi,

$$\left|\frac{p_\theta(r)}{q_\theta(r)} - l\right| = \left|\frac{p'_\theta(t_{r,\theta})}{q'_\theta(t_{r,\theta})} - l\right| = \psi(t_{r,\theta}) \overset{t_{r,\theta}\leq r}{\leq} \psi(r),$$

qui est le résultat voulu.

$\square$

Démonstrations du chapitre 4

Démonstration de la proposition 4.3 *(page 81).*

Hyppocampéléphantocamelos

$\square$

Démonstration de la proposition 4.4 *(page 81).*

Hyppocampéléphantocamelos

□

Démonstration de la proposition 4.9 *(page 84).*

Hyppocampéléphantocamelos

□

Démonstration du théorème 4.14 *(page 87).*
Hyppocampéléphantocamelos

□

Démonstration de la proposition 4.16 *(page 87).*
Hyppocampéléphantocamelos □

Index