Analyse I
pour sections d'ingénierie

David Strütt

Version beta du 19 janvier 2024.

Table des matières

Préface

Le but de ce polycopié est de servir de base et de référence pour des cours d'analyse I pour sections d'ingénierie à l'EPFL.
Il ne présente néanmoins aucune garantie de couvrir toute la matière présentée dans un cours d'analyse I. Il vaut mieux toujours se référer aux ressources données par l'enseignant · e du cours.
Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui ont aidé à l'élaboration du polycopié. Merci à mes collègues Samuel Dubuis, Simone Deparis, Sacha Friedli, Peter Wittwer, Maude Girardin, Paride Passelli et Léo Disrens pour les discussions productives, l'aide avec le code LaTeX, et les différentes ressources mises à disposition. Merci à Lénaïc Chizat, Daniel Kressner et les étudiants · es anonymes pour la correction des typos. Merci également à Julia Bierent pour le travail de relecture et les commentaires.

Chapitre 0

Rappels et notions de base

0.1 Ensembles

Définition 0.1 (Ensemble)**.**
Un *ensemble* est une collection d'éléments. On peut définir les ensembles à l'aide d'une propriété, comme par exemple

$$\{n \ : \ n \text{ est un nombre entier naturel impair plus petit que } 8\}$$

ou en en énumérant les éléments, comme par exemple

$$\{1, 3, 5, 7\}.$$

Ces deux ensembles sont les mêmes car ils ont exactement les mêmes éléments. L'ordre dans lequel on liste les éléments n'a pas d'importance. L'ensemble $\{3, 5, 1, 7\}$ est toujours le même ensemble.

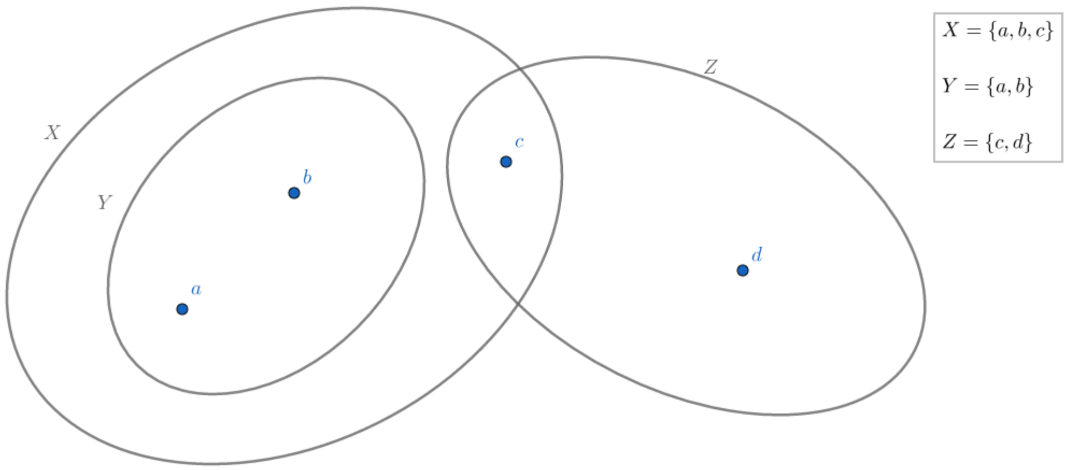


FIGURE 1 – Exemple de trois ensembles X, Y et Z dont les éléments sont différentes combinaisons de a, b, c et d.

Notation 0.2.
Soient a, b deux objets et A et B deux ensembles.

(*i*) On écrit $a \in A$ pour dire que a appartient à A, c'est-à-dire que a est dans l'ensemble A. Par exemple, dans la figure 1, $a \in Y$, $c \in X$.

(*ii*) On écrit $a \notin A$ pour dire que a n'appartient pas à A, c'est-à-dire que a n'est pas dans l'ensemble A. Par exemple, dans la figure 1, $c \notin Y$, $d \notin X$.

(*iii*) On écrit $A \subset B$ pour dire que A est un sous-ensemble de B, c'est à dire chaque élément de A est aussi un élément de B. Par exemple, dans la figure 1, $Y \subset X$, $\{d\} \subset Z$.

(*iv*) On écrit $A \not\subset B$ pour dire que A n'est pas un sous-ensemble de B, c'est-à-dire A contient au moins un élément qui n'est pas dans B. Par exemple, dans la figure 1, $X \not\subset Y$ car $c \in X$ et $c \notin Y$, $Z \not\subset X$ car $a \in X$ et $a \notin Z$.

(*v*) On écrit $A = B$ pour dire que A et B sont égaux, c'est-à-dire, ils contiennent exactement les mêmes éléments.

(*vi*) On écrit $A \neq B$ pour dire que A et B ne sont pas égaux, c'est-à-dire ils ne contiennent pas exactement les mêmes éléments : soit il y a un élément de A qui n'est pas dans B, soit il y a un élément de B qui n'est pas dans A. Par exemple $X \neq Y$, $Y \neq Z$, $X \neq Z$.

(*vii*) On note $\emptyset = \{\}$ l'ensemble vide qui n'a aucun élément.

Remarque 0.3. (*i*) Quelque soit l'ensemble A, on a toujours $\emptyset \subset A$ et $A \subset A$.

(*ii*) Pour deux ensembles A et B, on a $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définition 0.4 (Ensemble des parties)**.**
Soit A un ensemble. L'*ensemble des parties de* A, $\mathcal{P}(A)$ est

$$\mathcal{P}(A) = \{B \ : \ B \subset A\}$$

Exemple 0.5. (*i*) Si $X = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}.$$

(*ii*) Si $A = \{a\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}.$$

Définition 0.6 (Union, intersection et différence d'ensembles)**.**
Soient A, B des ensembles.

(*i*) *L'union de* A *et* B, notée $A \cup B$ est l'ensemble

$$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

(*ii*) *L'intersection de* A *et* B, notée $A \cap B$ est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

(*iii*) *La différence,* A *privé de* B *ou* A *sans* B, notée $A \backslash B$ est l'ensemble

$$A \backslash B = \{x \ : \ x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Exemple 0.7. (*i*) Si $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ et $Z = \{c, d\}$ comme dans la figure 1, page 4, on a

$$\begin{aligned}
X \cup Z =& \{a, b, c, d\} \\
Y \cup Z =& \{a, b, c, d\} \\
X \cup Y =& \{a, b, c\} \\
X \cap Z =& \{c\} \\
Y \cap Z =& \emptyset \\
X \cap Y =& \{a, b\} \\
X \backslash Z =& \{a, b\} \\
X \backslash Y =& \{c\} \\
Y \backslash Z =& \{a, b\} = Y \\
Y \backslash X =& \emptyset
\end{aligned}$$

Définition 0.8 (Produit cartésien)**.**
Soient A, B deux ensembles. *Le produit cartésien de A et B* noté $A \times B$ est l'ensemble des couples d'un élément de A et d'un élément de B,

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Un élément $(a, b) \in A \times B$ est appelé un *couple*. L'ordre entre les deux parties du couple est important. C'est-à-dire, (a, b) et (b, a) ne sont pas les mêmes couples.

Remarque 0.9. (*i*) La notion de produit cartésien se généralise pour plus de 2 ensembles. Par exemple, si A, B et C sont trois ensembles,

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \ : \ a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

(*ii*) Attention,

$$A \times B \times C \neq (A \times B) \times C \neq A \times (B \times C).$$

En effet, un élément de $A \times B \times C$ s'écrit (a, b, c), un élément de $A \times (B \times C)$ s'écrit $(a, (b, c))$ et un élément de $(A \times B) \times C$ s'écrit $((a, b), c)$. Toutes les parenthèses sont importantes. L'élément (a, b, c) est un *triplet*, tandis que $(a, (b, c))$ et $((a, b), c)$ sont des couples où un des deux éléments du couple est lui-même un couple.

(*iii*) Pour tout ensemble A,

$$A \times \emptyset = \emptyset.$$

Exemple 0.10. (*i*) Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$. Alors,

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

(*ii*) $\mathbb{R}^2$ qu'on appelle *le plan* est le produit cartésien de la droite réelle $\mathbb{R}$ avec elle-même. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

(*iii*) Soient

$$\begin{aligned}
A =& \{\text{Frène}, \text{Saule}, \text{If}, \text{Houx}\} \\
B =& \{\text{Ventricule de Dragon}, \text{Plume de Phénix}, \text{Crin de Licorne}\}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}A \times B = \{&(\text{Frène}, \text{Ventricule de Dragon}), (\text{Frène}, \text{Plume de Phénix}),\\ &(\text{Frène}, \text{Crin de Licorne}), (\text{Saule}, \text{Ventricule de Dragon}),\\ &(\text{Saule}, \text{Plume de Phénix}), (\text{Saule}, \text{Crin de Licorne}),\\ &(\text{If}, \text{Ventricule de Dragon}), (\text{If}, \text{Plume de Phénix}),\\ &(\text{If}, \text{Crin de Licorne}), (\text{Houx}, \text{Ventricule de Dragon}),\\ &(\text{Houx}, \text{Plume de Phénix}), (\text{Houx}, \text{Crin de Licorne})\}\end{aligned}$$

L'ensemble $A \times B$ représente quelques associations de bois et de coeurs utilisés dans la confection de baguettes magiques dans la série de fictions Harry Potter.

0.2 Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Définition 0.11 (Les nombres entiers naturels $\mathbb{N}$)**.**
L'ensemble des nombres entiers naturels noté $\mathbb{N}$ est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Par convention $0 \in \mathbb{N}$ est un nombre pair.
On note encore $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
$\mathbb{N}$ est muni d'un ordre total noté $\leq$ tel que

(i) pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$,

(ii) pour tous $x, y, z \in \mathbb{N}$, tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a $x \leq z$

(iii) pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $x \leq y$ et $y \leq x$, on a $x = y$.

$\mathbb{N}$ est muni de deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication.
L'addition, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, $x + y$. L'addition a comme élément neutre $0 \in \mathbb{N}$. On appelle élément neutre un élément e tel que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $n + e = n$. L'addition n'a pas d'inverse dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire, pour $x \in \mathbb{N}$, il n'existe pas nécessairement $y \in \mathbb{N}$ tel que $x + y = 0$.
La multiplication, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y$. La multiplication a comme élément neutre $1 \in \mathbb{N}$, la multiplication n'a pas d'inverse, c'est-à-dire pour $x \in \mathbb{N}^*$, il n'existe pas nécessairement $y \in \mathbb{N}$ tel que $x \cdot y = 1$.

Définition 0.12 (Les nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$)**.**
L'ensemble des nombres entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$ est

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
On note encore $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
Tout comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ est muni d'un ordre total et de deux lois de compositions, l'addition et la multiplication. L'addition a son inverse dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe $-x \in \mathbb{Z}$ tel que $x + (-x) = 0$.

Définition 0.13 (Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$)**.**
L'ensemble des nombres rationnels noté $\mathbb{Q}$ est

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\},$$

où $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$.
On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{x}{1} \in \mathbb{Q}$.
On note $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash \{0\}$.
Tout comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ est mini d'un ordre total et de deux lois de compositions.
L'addition :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

et la multiplication :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

L'addition et la multiplication ont leur inverse dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire, pour tout $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, il existe $-x = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$ tel que $x + (-x) = 0$ et pour tout $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, il existe $x^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^*$ tel que $x \cdot x^{-1} = 1$.
Tout élément $x \in \mathbb{Q}$ a une infinité de représentations sous forme de fractions. En effet, si $x = \frac{a}{b}$ alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}$,

$$x = \frac{ca}{cb}.$$

Si $b > 0$ et que a et b n'ont pas d'autre diviseur en commun que 1, on dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est *irréductible.* Tout élément de $\mathbb{Q}$ peut s'écrire sous forme d'une fraction irréductible et cette écriture est unique.

Théorème 0.14.
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous forme de fraction

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

et choisissons la fraction telle qu'elle soit irréductible. En élevant l'égalité au carré, on obtient

$$2 = \frac{a^2}{b^2},$$

ce qui implique

$$2b^2 = a^2.$$

En particulier, 2 divise a^2 et donc a^2 est pair. Or, si a^2 est pair, ceci implique que a est pair également. En effet, si a était impair, a^2 serait impair aussi.
Vu que a est pair, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2c$. En reprenant notre dernière égalité, ceci implique

$$2b^2 = a^2 = 4c^2.$$

En divisant l'égalité par 2 on obtient

$$b^2 = 2c^2.$$

Or, ceci implique que b^2 est pair et comme on a vu avant, on peut en déduire que b est pair.
Mais, si a et b sont tous deux pairs, ceci implique que 2 est un diviseur en commun de a et b et donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible. Ceci est une contradiction et donc $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction de nombres entiers relatifs et n'est donc pas un élément de $\mathbb{Q}$. $\square$

Remarque 0.15.
On définit les nombres réels dont $\sqrt{2}$ fait partie dans le chapitre 1.

Notation 0.16 (Symboles somme $\sum$, et produit $\prod$)**.**
Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leq n$ et pour $k \in \mathbb{Z}$, $m \leq k \leq n$, $a_k \in \mathbb{R}$ des nombres définis.
On note

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Par convention, si $m > n$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$$

Exemple 0.17. (i)

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m.$$

(ii)

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2.$$

(iii)

$$\sum_{k=m}^{n} 14 = \underbrace{14 + 14 + ... + 14}_{n-m+1 \text{ fois}} = 14(n - m + 1).$$

(iv)

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n = n!.$$

(v)

$$\prod_{k=m}^{n} 14 = \underbrace{14 \cdot 14 \cdot ... \cdot 14}_{n-m+1 \text{ fois}} = 14^{(n-m+1)}.$$

Remarque 0.18.
Les expressions,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k$$

ne dépendent pas de k. En effet, on a par exemple

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{i=m}^{n} a_i$$

Proposition 0.19.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $j, l, m, n \in \mathbb{Z}$ avec $l \leq m \leq n$ et pour $l \leq k \leq n+1$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Alors,

(i)
$$\sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_k,$$

(ii)
$$\sum_{k=l}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=l}^{n} a_k + \sum_{k=l}^{n} b_k,$$

(iii)
$$\sum_{k=l}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

(iv)
$$\sum_{k=l}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_l$$

(v)
$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l-j}^{n-j} a_{k+j}$$

(vi)
$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_{n+l-k}$$

(vii)
$$\left(\prod_{k=l}^{m} a_k\right) \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=l}^{n} a_k,$$

(viii)
$$\prod_{k=l}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=l}^{n} a_k\right) \left(\prod_{k=l}^{n} b_k\right),$$

(ix)
$$\prod_{k=l}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=l}^{n} a_k\right)^p.$$

(x) *Si pour tout $l \leq k \leq n$, $a_k \neq 0$,*
$$\prod_{k=l}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_l}$$

(xi)
$$\prod_{k=l}^{n} a_k = \prod_{k=l-j}^{n-j} a_{k+j}$$

(xii)
$$\prod_{k=l}^{n} a_k = \prod_{k=l-j}^{n-j} a_{k+j}$$

Démonstration. (*i*) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k =&(a_l + a_{l+1} + ... + a_{m-1} + a_m)\\ &+ (a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{n-1} + a_n)\\ =&\sum_{k=l}^{n} a_k.\end{aligned}$$

(*ii*) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{n}(a_k + b_k) =&a_l + b_l + a_{l+1} + b_{l+1} + ... + a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n\\ =&a_l + a_{l+1} + ... + a_{n-1} + a_n + b_l + b_{l+1} + ... + b_{n-1} + b_n\\ =&\sum_{k=l}^{n} a_k + \sum_{k=l}^{n} b_k\end{aligned}$$

(*iii*) On a

$$\sum_{k=l}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{l+1} - a_l + a_{l+2} - a_{l+1} + ... + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_l$$

(*iv*) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{n} \lambda a_k =&\lambda a_l + \lambda a_{l+1} + ... + \lambda a_{n-1} + \lambda a_n\\ =&\lambda(a_l + a_{l+1} + ... + a_{n-1} + a_n)\\ =&\lambda \sum_{k=l}^{n} a_k.\end{aligned}$$

(*v*) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=l-j}^{n-j} a_{k+j} =&a_{l-j+j} + a_{l-j+1+j} + ... + a_{n-j-1+j} + a_{n-j+j}\\ =&a_l + a_{l+1} + ... + a_{n-1} + a_n\\ =&\sum_{k=l}^{n} a_k\end{aligned}$$

(*vi*) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{n} a_{n+l-k} =&a_{n+l-l} + a_{n+l-(l+1)} + ... + a_{n+l-(n-1)} + a_{n+l-n}\\ =&a_n + a_{n-1} + ... + a_{l+1} + a_l\\ =&a_l + a_{l+1} + ... + a_{n-1} + a_n\\ =&\sum_{k=l}^{n} a_k\end{aligned}$$

Les points (*vii*) à (*xii*) sont en tous points similaires. □

0.3 Relations et fonctions

Définition 0.20 (Relation)**.**
Soient X et Y deux ensembles. *Une relation sur X et Y* est la donnée d'un ensemble

$$R \subset X \times Y.$$

Si $X = Y$, et que $R \subset X \times X$ est une relation, on dit que R est *une relation sur X*.

Exemple 0.21. (*i*) Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 4, 8\}$ et la relation

$$R = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ x + y \text{ est pair}\}.$$

On a alors

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (4, 2), (4, 4), (4, 8)\}.$$

Définition 0.22 (Relation d'équivalence)**.**
Soit X un ensemble et $R \subset X \times X$ une relation sur X.

(*i*) On dit que R est *réflexive* si $\forall x \in X$, $(x, x) \in R$.

(*ii*) On dit que R est *symétrique* si $\forall x, y \in X$ tel que $(x, y) \in R$, on a $(y, x) \in R$.

(*iii*) On dit que R est *transitive* si $\forall x, y, z \in X$ tel que $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$, on a $(x, z) \in R$.

(*iv*) On dit que R est une *relation d'équivalence* si R est réflexive, symétrique et transitive.

Notation 0.23.
Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble X.
Si un couple $(x, y) \in X \times X$ est tel que $(x, y) \in R$, on écrit $x \sim y$.
Avex cette notation, la définition ci-dessus s'écrit

(*i*) On dit que R est *réflexive* si $\forall x \in X$, $x \sim x$.

(*ii*) On dit que R est *symétrique* si $\forall x, y \in X$ tel que $x \sim y$, on a $y \sim x$.

(*iii*) On dit que R est *transitive* si $\forall x, y, z \in X$ tel que $x \sim y$ et $y \sim z$, on a $x \sim z$.

Exemple 0.24. (*i*) Soit $X = \{x \ : \ x \text{ étudie à l'EPFL}\}$ et la relation

$$x \sim y \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont dans la même section.}$$

Cette relation est une relation d'équivalence. En effet, si $x \in X$, x est dans la même section que x et donc, $x \sim x$, ce qui montre que la relation est réflexive. De plus, si $x, y \in X$ sont tels que $x \sim y$, alors x et y sont dans la même section. Ainsi, y et x sont dans la même section et donc $y \sim x$, ce qui montre que la relation est symétrique. De plus, si $x \sim y$ et $y \sim z$, c'est-à-dire, x est dans la même section que y et y est dans la même section que z, alors, x et z doivent être dans la même section. Ainsi, $x \sim z$ ce qui montre que la relation est transitive.

(*ii*) Soit $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ l'ensemble des nombres naturels et la relation

$$x \sim y \text{ si lorsqu'on fait la division euclidienne de } x \text{ et } y \text{ par 3, on a le même reste.}$$

Cette relation est une relation d'équivalence.

(iii) Soit $X = \mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ et la relation

$$x \sim y \text{ si } x \leq y.$$

Cette relation n'est pas une relation d'équivalence ; elle est reflexive et transitive, mais pas symétrique. En effet, par exemple, on a $0 \sim 1$ car $0 \leq 1$, mais pas $1 \sim 0$ car $1 \not\leq 0$.

(iv) Soit X l'ensemble de tous les Pokémon de la génération 1 et la relation

$$x \sim y \text{ si } x \text{ et } y \text{ ont un type en commun.}$$

Cette relation n'est pas une relation d'équivalence ; elle est réflexive et symétrique, mais pas transitive. En effet, certains Pokémon peuvent avoir plusieurs types. Si on considère Roucarnage qui est type vol et normal, Papilusion qui est type vol et insecte et Chrysacier qui est type insecte, on a Roucarnage $\sim$ Papilusion et Papilusion $\sim$ Chrysacier, mais on n'a pas Roucarnage $\sim$ Chrysacier.

Définition 0.25 (Classe d'équivalence, ensemble quotient)**.**
Soit X un ensemble et $\sim$, une relation d'équivalence.

(i) Pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence de x, notée C_x est l'ensemble

$$C_x = \{y \in X \ : \ y \sim x\}.$$

(ii) Le quotient de X par la relation d'équivalence $\sim$, noté $X/_\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalences.

Exemple 0.26. (i) Soit $X = \{x \ : \ x \text{ étudie à l'EPFL}\}$ et la relation

$$x \sim y \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont dans la même section.}$$

On a vu plus haut que cette relation est une relation d'équivalence. Si $x \in X$ est dans la section S, on a

$$C_x = \{y \in X \ : \ x \sim y\} = \{y \ : \ y \text{ est dans la section } S\}.$$

Donc, si on définit les ensembles

$$\begin{aligned}
CGC &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section chimie et génie chimique}\}\\
MA &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section mathématiques}\}\\
PH &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section physique}\}\\
IN &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section informatique}\}\\
SC &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section systèmes de communication}\}\\
EL &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section génie électrique et électronique}\}\\
GM &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section génie mécanique}\}\\
MT &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section microtechnique}\}\\
MX &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section science et génie des matériaux}\}\\
SV &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section ingénierie des sciences du vivant}\}\\
AR &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section architecture}\}\\
GC &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section génie civil}\}\\
SIE &= \{x \in X \ : \ x \text{ est en section sciences et ingénirie de l'environnement}\},
\end{aligned}$$

on a

$$X/_\sim = \{CGC, MA, PH, IN, SC, EL, GM, MT, MX, SV, AR, GC, SIE\}.$$

(*ii*) Soit $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ l'ensemble des nombres naturels et la relation

$x \sim y$ si lorsqu'on fait la division euclidienne de x et y par 3, on a le même reste.

On a vu plus haut que cette relation est une relation d'équivalence. On a, à titre d'exemple

$$\begin{aligned} C_1 =& \{1, 4, 7, 10, 13, ...\} \\ C_{14} =& \{2, 5, 8, 11, 14, 17, ...\}. \end{aligned}$$

Le quotient est

$$X/_\sim = \{C_0, C_1, C_2\}$$

Proposition 0.27.
Soit X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$. Alors,

(*i*) *Pour tous $x, y \in X$, $C_x = C_y$ si et seulement si $x \sim y$*

(*ii*) *Si $x, y \in X$ sont tels que $x \not\sim y$, alors $C_x \cap C_y = \emptyset$*

Démonstration. (*i*) On commence par supposer que $C_x = C_y$ et on montre que $x \sim y$.
Par réflexivité de $\sim$, on a $x\tilde{x}$, ce qui implique que $x \in C_x$ par définition de C_x. Par hypothèse, ceci implique que $x \in C_y$ et donc $x \sim y$ par définition de C_y, ce qui est le résultat voulu.
Supposons maintenant que $x \sim y$ et montrons que $C_x = C_y$.
Soit $z \in C_x$ quelconque. Par définition, on a donc $z \sim x$. Par transitivité de $\sim$ vu que $x \sim y$, on a $z \sim y$, donc $z \in C_y$. Vu que z est quelconque, on a montré que $C_x \subset C_y$. Par les mêmes arguments, on a $C_y \subset C_x$ ce qui implique que $C_x = C_y$, qui est le résultat voulu.

(*ii*) On montre le résultat par contraposée. On suppose que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ et on montre que $x \sim y$.
Soit $z \in C_x \cap C_y$. Alors, $z \sim x$ et $z \sim y$. Par transitivité, on déduit $x \sim y$ qui est le résultat voulu. □

Définition 0.28 (fonction)**.**
Soient X et Y deux ensembles. *Une fonction* f est la donnée d'une relation R_f sur X et Y telle que pour tout $x \in X$, il existe un et un seul $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R_f$. On appelle y l'image de x et on note $y = f(x)$.
On note alors $f : X \to Y$, X est *le domaine* de f, qu'on note des fois $D(f)$ et Y est *le codomaine* de f.

Définition 0.29.
Soit $f : X \to Y$ une fonction, $A \subset X$ et $B \subset Y$.

(*i*) *L'ensemble image de A par f*, noté $f(A)$ est l'ensemble

$$f(A) = \{f(a) \ : \ a \in A\} = \{y \in Y \ : \ \text{il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

(*ii*) *L'ensemble image de f*, noté $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{y \in Y \ : \ \text{il existe } x \in X \text{ tel que } f(x) = y\}$$

(*iii*) *La préimage de B par f*, noté $f^{-1}(B)$ est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ f(x) \in B\}.$$

Exemple 0.30. (*i*) Soit X l'ensemble des pays du monde et Y l'ensemble des villes du monde. On définit la fonction capitale $\operatorname{cap}: X \to Y$ par

$$\operatorname{cap}(x) = \text{la capitale du pays } x.$$

On a alors à titre d'exemple que

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}(\text{Suisse}) =& \text{Berne} \\ \operatorname{cap}(\text{Allemagne}) =& \text{Berlin} \\ \operatorname{cap}(\text{Japon}) =& \text{Tokyo} \\ \operatorname{cap}(\text{Royaume-Uni}) =& \text{Londres} \\ \operatorname{cap}(\text{France}) =& \text{Paname} \\ \operatorname{cap}(\text{Italie}) =& \text{Rome} \end{aligned}$$

Ceci définit bien une fonction car chaque pays a une et une seule capitale.

(*ii*) Soit $X = Y = \mathbb{R}$ et la relation $R = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ x = y^2\}$.
Cette relation ne définit pas une fonction. En effet, il existe des éléments x du domaine qui n'ont pas d'image. Par exemple $x = -1$, alors, il n'existe pas de y dans $\mathbb{R}$ tel que $y^2 = -1$. De plus, il existe des éléments x du domaine qui ont plus d'une image. Par exemple, si $x = 4$, alors on a $(4, 2), (4, -2) \in R$.

(*iii*) Soit $X = Y = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ et la relation $R = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ x = y^2\}$.
Cette relation définit une fonction $f: X \to Y$ telle que $f(x) = \sqrt{x}$.
Remarquons qu'ici on n'a pas les mêmes problèmes que dans l'exemple précédent car $-1 \notin X$ et $-2 \notin Y$.

Définition 0.31 (Fonction injective, surjective et bijective)**.**
Soit $f: X \to Y$ une fonction.

(*i*) On dit que f *est injective* ou f est une *injection* si pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$.

(*ii*) On dit que f *est surjective* ou f est une *surjection* si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

(*iii*) On dit que f *est bijective* ou f est une *bijection* si f est injective et surjective.

Remarque 0.32.
On a qu'une fonction f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f)$ est égal au codomaine de f.

Exemple 0.33. (*i*) Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = x^2.$$

Alors, f est bijective.
On montre que f est injective par contraposée. C'est-à-dire on montre que si $x, y \in \mathbb{R}_+$ sont tels que $f(x) = f(y)$ on a $x = y$. On a

$$\begin{aligned} f(x) =& f(y) \\ x^2 =& y^2 \\ |x| =& |y|. \end{aligned}$$

Or, vu que $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a $x = |x| = |y| = y$, qui montre que f est injective.
Passons à la démonstration que f est surjective. Soit donc $y \in \mathbb{R}_+$. Alors, si $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f(x) = x^2 = \sqrt{y}^2 = y,$$

ce qui montre que f est surjective.

(*ii*) Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2.$$

Alors, f est injective mais pas surjective. La démonstration pour l'injectivité est la même que dans le point précédent. Tandis que pour la surjectivité, si $y = -1$ par exemple, il n'existe pas de x tel que $f(x) = y$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f(x) = x^2 \geq 0 > -1 = y,$$

donc $f(x) \neq y$ quelque soit $x \in \mathbb{R}_+$.

(*iii*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = x^2.$$

Alors, f est surjective, mais pas injective. La fonction n'est pas injective car par exemple $-1, 1 \in \mathbb{R}_+$ et $f(-1) = 1 = f(1)$. La démonstration de la surjectivité est la même que dans le premier point.

(*iv*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2.$$

Alors, f est ni injective ni surjective. La démonstration est la même que dans les deux points précédents.

Définition 0.34 (Composition de fonctions)**.**
Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ deux fonctions. *La composition de g et f*, notée $g \circ f$ est la fonction $g \circ f\colon X \to Z$ définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Définition 0.35 (Fonction réciproque)**.**
Soit $f\colon X \to Y$ une fonction. Supposons qu'il existe $g\colon Y \to X$ tel que

$$\text{pour tout } y \in Y,\ f \circ g(y) = y \qquad \text{et pour tout } x \in X,\ g \circ f(x) = x.$$

Alors, on dit que f est *inversible* et on note $g = f^{-1}$ qu'on appelle la *fonction réciproque de f*.

Théorème 0.36.
Une fonction est inversible si et seulement si elle est bijective

Démonstration. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction.
Commençons par supposer que f est inversible et montrons que f est bijective.
Par hypothèse, il existe $f^{-1}\colon Y \to X$ tel que

$$\text{pour tout } y \in Y,\ f \circ f^{-1}(y) = y \qquad \text{et pour tout } x \in X,\ f^{-1} \circ f(x) = x.$$

Montrons que f est injective par contraposée, c'est-à-dire, on montre que $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Soient donc $x_1, x_2 \in X$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$ quelconques. Alors,

$$x_1 = f^{-1}(\underbrace{f(x_1)}_{=f(x_2)}) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2,$$

qui montre que f est injective.
Montrons que f est surjective, c'est-à-dire, on montre que $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $f(x) = y$.
Soit donc $y \in Y$ quelconque. Posons $x = f^{-1}(y) \in X$. Alors,

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y,$$

qui montre que f est surjective.
Passons maintenant à la réciproque. Supposons que f est bijective et montrons que la fonction réciproque de f, $f^{-1}\colon Y \to X$ existe. On sépare la démonstration en 4 étapes.
Étape 1 : Montrons que pour tout $y \in Y$, il existe un unique $x_y \in X$ tel que $f(x_y) = y$.
Soit donc $y \in Y$. Par surjectivité de f, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Montrons que cet élément de X est unique en montrant que si il en existe deux, ils doivent être égaux.
Supposons donc que $x_1, x_2 \in X$ sont tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Par injectivité de f, ceci implique que $x_1 = x_2$. Ainsi, l'élément $x_y \in X$ tel que $f(x_y) = y$ est bien unique.
Étape 2 : Construisons une fonction $g\colon Y \to X$.
On définit $g\colon Y \to X$ par $g(y) = x_y$, où x_y est l'unique élément de X tel que $f(x_y) = y$.
Étape 3 : Montrons que pour tout $y \in Y$, $f(g(y)) = y$.
Soit donc $y \in Y$ quelconque. Par définition de g, $g(y) = x_y$ où x_y est tel que $f(x_y) = y$.
Ainsi,

$$f(g(y)) = f(x_y) = y,$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 4 : Montrons que pour tout $x \in X$, $g(f(x)) = x$.
Soit $x \in X$ quelconque et $y = f(x)$. Par définition de g, $g(y) = x_y$ est l'unique élément de X tel que $f(x_y) = y$. Or, x vérifie $f(x) = y$. Par unicité on déduit donc que $x_y = x$. Ainsi,

$$g(f(x)) = g(y) = x_y = x,$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Les étapes 3 et 4 montrent bien que g est la fonction réciproque de f et donc f est inversible.
□

Exemple 0.37. (*i*) Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = x^2.$$

On a vu que f est bijective. Par le théorème, f est donc inversible. On a que $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est définie par

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

En effet, on a

$$f \circ f^{-1}(x) = \sqrt{x}^2 = x$$

et

$$f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

(*ii*) Soit $f \colon X \to Y$ une fonction injective et $g \colon X \to \mathrm{Im}(f)$ définie par

$$g(x) = f(x).$$

Alors, g est bijective.

On commence par montrer que g est injective. On le montre par contraposée. Soient $x, y \in X$ tel que $g(x) = g(y)$. Par définition de g, ceci implique $f(x) = f(y)$. Vu que f est injective par hypothèse, on a $x = y$ qui est le résultat voulu.

Montrons maintenant que g est surjective. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ par définition de $\mathrm{Im}(f)$ ceci implique qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Alors, par définition de g, on a

$$g(x) = f(x) = y,$$

ce qui montre que g est surjective.

On a donc que g est bijective et donc inversible.

Remarque 0.38.
Pour trouver la fonction réciproque d'une fonction $f \colon X \to Y$ donnée avec $X, Y \subset \mathbb{R}$, on pose $y = f(x)$ et on résout pour x. L'identité avec laquelle on termine est $x = f^{-1}(y)$.

Définition 0.39 (Restriction et prolongement de fonction)**.**
Soient $X \subset Y \subset Z$, E des ensembles et $f \colon X \to E$, $g \colon Y \to E$, $h \colon Z \to E$ des fonctions.

(*i*) f est *la restriction de g à X* si pour tout $x \in X$,

$$f(x) = g(x).$$

On note alors

$$f = g|_X.$$

(*ii*) h est *un prolongement de g à Z* si pour tout $x \in Y$,

$$g(x) = h(x).$$

0.4 Puissances, racines et polynômes

Définition 0.40 (Puissances, racines)**.**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) On définit *a à la puissance n* par : si $n = 0$ et $a \neq 0$, $a^0 = 1$, sinon

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}$$

De plus, si $n \geq 1$ et $a \neq 0$, on définit

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Pour finir, pour $n \geq 1$, on définit

$$0^n = 0.$$

(*ii*) Si $n \geq 1$ est impair on définit *la racine $n^{\text{ème}}$ de a* qu'on note $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$ comme l'unique nombre réel tel que
$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$
Si $n \geq 2$ est pair et $a \geq 0$, on définit *la racine $n^{\text{ème}}$ de a* qu'on note $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$ comme l'unique nombre réel positif tel que
$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Remarque 0.41.
Si $a < 0$ et n est pair, l'équation
$$x^n = a$$
n'a pas de solution réelle. Et donc, la racine $n^{\text{ème}}$ de a n'est pas définie dans ce cas.

Proposition 0.42.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$
Alors,

(*i*) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

(*ii*) $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$.

(*iii*) $(ab)^n = a^n b^n$.

(*iv*) *si* $a \neq 0$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Démonstration. (*i*) On a
$$a^n \cdot a^m = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ fois}}}_{n+m \text{ fois}} = a^{n+m}.$$

(*ii*) On a
$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m \text{ fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \cdot m \text{ fois}} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = (a^m)^n.$$

(*iii*) On a
$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdots ab}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ fois}} = a^n b^n$$

(*iv*) On distingue deux cas.
Cas 1 : $n \geq m$.
On a, par (*i*),
$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^m a^{n-m}}{a^m} = a^{n-m}.$$
Cas 2 : $n < m$.
On a par (*i*),
$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n a^{m-n}} = \frac{1}{a^{m-n}} = a^{n-m}.$$

□

Définition 0.43 (Polynôme)**.**
Un polynôme est une fonction $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

On appelle n *le degré de* p et on note $n = \deg(p)$, les a_k sont appelés les *coefficients* de p.

Remarque 0.44.
Les sommes, différences, multiplications et compositions de polynômes sont des polynômes. La division de deux polynômes n'est pas nécessairement un polynôme.

Théorème 0.45 (Division euclidienne de polynômes)**.**
Soient p, q deux polynômes non nuls. Alors, il existe deux polynômes d et r tels que $\deg(r) < \deg(p)$ et

$$q = p \cdot d + r.$$

On appelle r le reste de la division euclidienne de q par p*.*

La démonstration de ce résultat est omise.

Remarque 0.46.
Soient deux polynômes p et q. Alors q/p est un polynôme si et seulement si le reste de la division euclidienne de q par p est nul. On dit alors que p *divise* q.

Exemple 0.47. (i) Soient $p(x) = 2x - 1$ et $q(x) = 6x^2 + 7x - 2$. Comme dans la division euclidienne de nombres, on commence par un tableau

$$\begin{array}{rr|l} 6x^2 & +7x - 2 & 2x - 1 \\ \hline & & \end{array}$$

On observe maintenant les termes de degrés les plus hauts : $6x^2$ et $2x$. On trouve par quoi on doit multiplier le deuxième pour trouver le premier. Ici, il s'agit de $3x$ car $3x \cdot 2x = 6x^2$. On écrit $3x$ sous le diviseur.

$$\begin{array}{rr|l} 6x^2 & +7x - 2 & 2x - 1 \\ \cline{3-3} & & 3x \end{array}$$

On multiplie ensuite notre diviseur $2x - 1$ par le terme qu'on vient d'écrire et on écrit le résultat sous le polynôme à gauche en inversant le signe de chaque terme. Ici, $3x$ fois $2x - 1$ donne $6x - 3x$, on écrit donc $-6x + 3x$.

$$\begin{array}{rr|l} 6x^2 & +7x - 2 & 2x - 1 \\ \cline{3-3} -6x^2 & +3x & 3x \\ \cline{1-2} \end{array}$$

On effectue ensuite la somme entre les deux polynômes qu'on a à gauche.

$$\begin{array}{rr|l} 6x^2 & +7x - 2 & 2x - 1. \\ \cline{3-3} -6x^2 & +3x & 3x \\ \cline{1-2} & 10x - 2 & \end{array}$$

On recommence maintenant avec le nouveau polynôme $10x - 2$ qui joue le rôle du polynôme $6x^2 + 7x - 2$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
6x^2 & +7x & -2 & 2x-1 \\ \cline{4-4}
-6x^2 & +3x & & 3x+5 \\ \cline{1-2}
 & 10x & -2 & \\
 & -10x & +5 & \\ \cline{2-3}
 & & 3 &
\end{array}
$$

Ce qu'on obtient ici est de degré 0 qui est strictement plus petit que $1 = \deg(p)$. On arrête donc la division euclidienne à ce stade et on a

$$q(x) = (3x+5)p(x) + 3,$$

et donc 3 est le reste de la division euclidienne de q par p.

(*ii*) Soient $p(x) = x^2 + 3x - 4$ et $q(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 + x - 1$.
Alors, la dinvision euclidienne de q par p est

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & +2x^5 & -3x^4 & +6x^3 & & +x & -1 & x^2+3x-4 \\ \cline{8-8}
-x^6 & -3x^5 & +4x^4 & & & & & x^4-x^3+4x^2-10x+46 \\ \cline{1-3}
 & -x^5 & +x^4 & +6x^3 & & & & \\
 & x^5 & +3x^4 & -4x^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 4x^4 & +2x^3 & & & & \\
 & & -4x^4 & -12x^3 & +16x^2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -10x^3 & +16x^2 & +x & & \\
 & & & 10x^3 & +30x^2 & -40x & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 46x^2 & -39x & -1 & \\
 & & & & -46x^2 & -138x & +184 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & -177x & +183 &
\end{array}
$$

Ici, on s'arrête à nouveau car $\deg(-177x + 183) = 1 < 2 = \deg(p)$.
On a donc que le reste de la division euclidienne de q par p est $-177x + 183$.

(*iii*) Soient $p(x) = x - 1$ et $q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
Alors, la dinvision euclidienne de q par p est

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -x & -1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+2x+1 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & -x & & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & x & -1 & \\
 & & -x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ici, le reste est 0 et donc p divise q et on a

$$\frac{q(x)}{p(x)} = x^2 + 2x + 1.$$

Théorème 0.48.
Soit p un polynôme de degré 1 ou plus et $a \in \mathbb{R}$. Alors, $p(a) = 0$ si et seulement si $x - a$ divise p.

Démonstration. Commençons par supposer que $p(a) = 0$ et montrons que $x - a$ divise p. Par le théorème sur la division euclidienne (Théorème 0.45, page 20), il existe d et r des polynômes tels que $\deg(r) < \deg(x - a)$ et

$$p(x) = d(x)(x - a) + r(x).$$

Remarquons que

$$0 \leq \deg(r) < \deg(x - a) = 1$$

implique que r est un polynôme de degré 0, c'est-à-dire, une constante, disons $r(x) = c$. Alors, en évaluant notre dernière égalité en a, on obtient

$$c = r(a) = p(a) - d(a)(a - a) \overset{p(a)=0}{=} 0 - d(a) \cdot 0 = 0.$$

Donc, $r = 0$ et $x - a$ divise p.
Passons maintenant à la réciproque. Supposons donc que $x - a$ divise p et montrons que $p(a) = 0$. On a qu'il existe d un polynôme tel que

$$p(x) = d(x)(x - a).$$

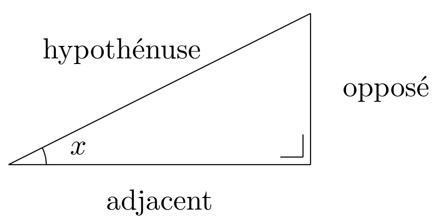
En évaluant ceci en a, on obtient

$$p(a) = d(a)(a - a) = 0,$$

qui est le résultat voulu et termine la démonstration. □

0.5 Les fonctions trigonométriques, l'exponentielle et le logarithme

Définition 0.49 (Fonctions trigonométriques)**.**
Il existe plusieurs façon de définir les fonctions trigonométriques, sin, cos et tan qui nous intéressent.
On peut les définir à l'aide de rapports préservés par les triangles rectangles semblables. Si x est un angle en radiant dans un triangle rectangle (autre que l'angle droit), on dénote l'hypothénuse le côté le plus long du triangle, l'adjacent le côté incident à x qui n'est pas l'hypothénuse et l'opposé le côté qui reste.



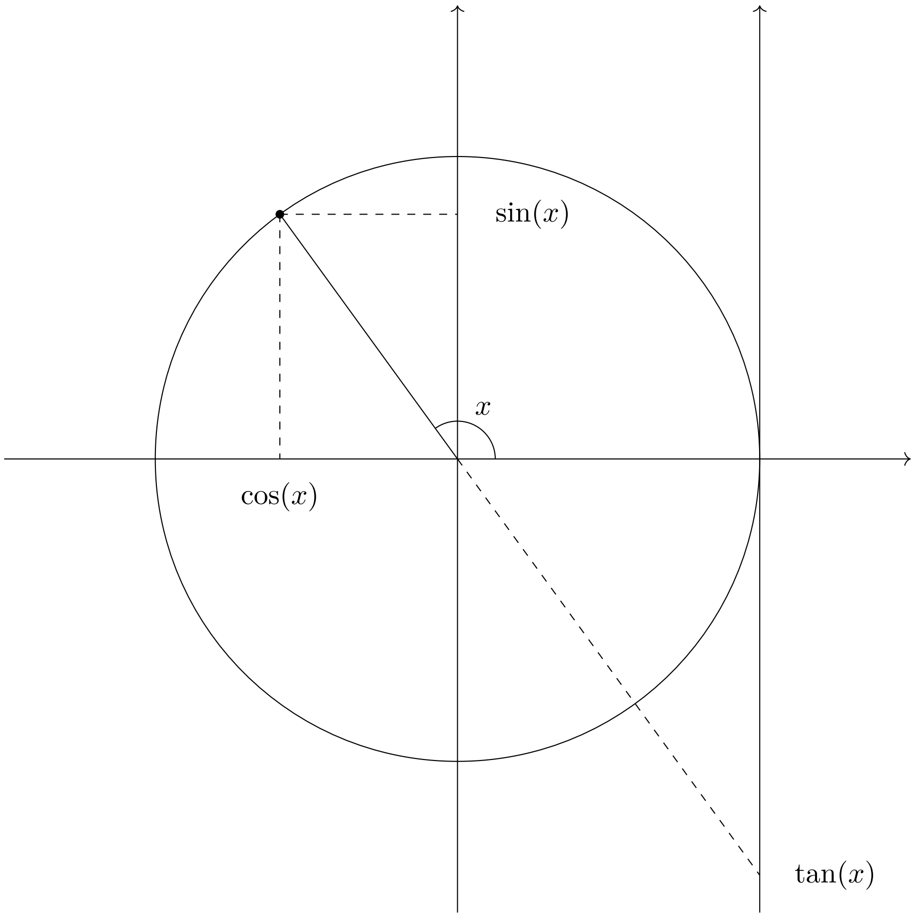
On a alors, pour tout $x \in]0, \pi/2[$,

$$\sin(x) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan(x) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$

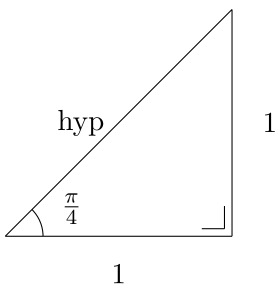
On peut aussi les définir à l'aide du cercle trigonométrique. Si x est un angle en radiant entre le demi-axe horizontal positif et un rayon du cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1, on peut lire les fonctions trigonométriques sur les axes pour $x \in [0, 2\pi]$.



On a toujours

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Exemple 0.50 (Quelques valeurs des fonctions trigonométriques)**.** (i) On s'intéresse à un triangle isocèle.

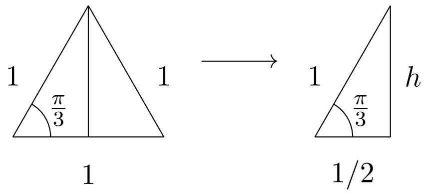


Par le théorème de Pythagore, on a $\text{hyp}^2 = 1^2 + 1^2$, c'est-à-dire, $\text{hyp} = \sqrt{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos(\pi/4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\tan(\pi/4) &= \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

(ii) On s'intéresse à un triangle équilatéral.

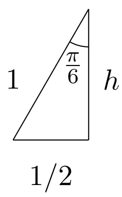


Par le théorème de pythagore, on a $h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$, c'est-à-dire, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/3) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos(\pi/3) &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \\
\tan(\pi/3) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

En changeant la perspective dans le triangle de droite, et en se concentrant sur l'angle qui a été coupé en 2 par la hauteur, on obtient également

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/6) &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \\
\cos(\pi/6) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\tan(\pi/6) &= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$



Proposition 0.51 (Quelques estimations utiles sur les fonctions trigonométriques)**.**
On a

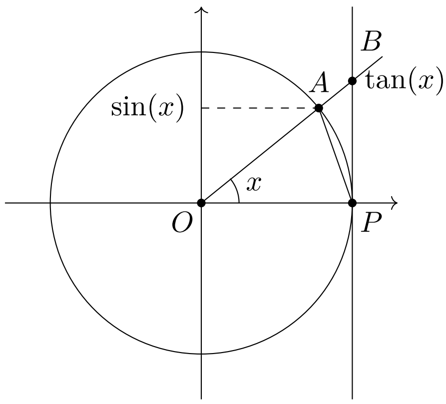
(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

(ii) pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$,

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Démonstration. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Considérons la figure suivante.



Vu que le triangle OPA est inclu dans le secteur de disque OPA qui est inclu dans le triangle OPB et que les aires respectives de ces figures sont données par

$$\frac{1}{2}\sin(x), \qquad \frac{1}{2}x, \qquad \frac{1}{2}\tan(x).$$

On déduit pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x) \tag{0.51.1}$$

(i) Si $x = 0$, on a $|\sin(x)| = 0$ et $|x| = 0$ et donc,

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on déduit de (0.51.1),

$$|\sin(x)| = \sin(x) \leq x = |x|,$$

qui est le résultat dans ce cas.
Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, on a $\sin(x) \leq 0$ et $x \leq 0$, donc, à nouveau par (0.51.1),

$$|\sin(x)| = -\sin(x) = \sin(-x) \overset{-x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}{\leq} -x = |x|,$$

qui est le résultat voulu dans ce cas.
Pour finir, si $x \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $|x| \geq \frac{\pi}{2} \geq 1$, et donc,

$$|\sin(x)| \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} \leq |x|,$$

qui est le résultat voulu dans le dernier cas et termine la démonstration de ce point.

(*ii*) Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, en divisant (0.51.1) par $\sin(x)$ qui est positif, on obtient.

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

En prenant l'inverse de ces identités, on en change l'ordre et on déduit

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Pour finir, si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$,

$$\cos(x) = \cos(-x) \overset{-x\in]0,\frac{\pi}{2}[}{\leq} \frac{\sin(-x)}{-x} \overset{-x\in]0,\frac{\pi}{2}[}{\leq} 1.$$

En utilisant que

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x},$$

on obtient le résultat.

Définition 0.52 (Exponentielle et logarithme)**.**
On définit l'exponentielle $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, par

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ou

$$\exp(x) = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k.$$

On ne montre pas ici que les deux limites sont les mêmes. On écrit également $\exp(x) = e^x$ car si e est la *constante d'Euler*

$$e = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp(n) = e^n,$$

où le membre de droite est le nombre e à la puissance n comme définit dans la section 0.4. L'exponentielle est inversible et on définit donc le logarithme comme son inverse $\log\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\log(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\log(e^x) = x$.

Remarque 0.53. (*i*) On peut se servir des propriétés de l'exponentielle et du logarithme pour définir a^b où a est un réel strictement positif et b est un réel :

$$a^b = e^{b\log(a)}.$$

Si $a > 0$, on définit l'inverse de a^x par $\log_a(x)$.

(*ii*) Dans certains ouvrages, la notation log est réservée à l'inverse de la fonction 10^x tandis que ln est utilisée pour l'inverse de e^x. Dans ce polycopié, l'inverse de 10^x est noté $\log_{10}$ et $\log = \log_e$ est réservé à l'inverse de e^x.

Proposition 0.54.
Pour tous $a, b, x, y > 0$ et $r \in \mathbb{R}$, on a

(i) $\log_a(1) = 0$.

(ii) $\log_a(a) = 1$.

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

(iv) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

(v) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

(vi) $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

Démonstration. On rappelle que $y = \log_a(x)$ est l'unique nombre tel que $a^y = x$.

(i) On a $a^0 = 1$, donc $\log_a(1) = 0$.

(ii) On a $a^1 = a$, donc $\log_a(a) = 1$.

(iii) On a $a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(x)}a^{\log_a(y)} = xy$, donc $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

(iv) On a $a^{-\log_a(x)} = \frac{1}{a^{\log_a(x)}} = \frac{1}{x}$, donc $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

(v) On a $a^{r\log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^r = x^r$, donc $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

(vi) On a

$$b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = \left(a^{\log_a(b)}\right)^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(b)\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = a^{\log_a(x)} = x.$$

D'où, $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

□

0.6 Techniques de démonstration

Exemple 0.55 (Démonstration par l'absurde)**.**
Pour montrer qu'un énoncé A est vrai, on peut supposer que A est faux et montrer qu'alors quelque chose qu'on sait vrai est faux. En d'autres termes, si il existe un énoncé B tel que

$$\neg A \Rightarrow (B \text{ et } \neg B),$$

alors, A est vrai.
Ce principe de démonstration n'a pas de preuve, car il fait en réalité partie des axiomes de la logique. Mais on peut s'en convaincre.
Si en supposant que quelque chose est vrai, on en déduit quelque chose de faux, c'est que nécessairement, n a "fait une erreur". Si nos déductions ne contiennent pas d'erreur, c'est que nécessairement l'erreur vient de l'hypothèse supplémentaire qu'on s'est donnée (ce qu'on a supposé vrai) doit être fausse.
Montrons par exemple le résultat suivant par contradiction :
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$. Alors, $x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
Supposons par l'absurde que $x + y \in \mathbb{Q}$. Alors, par hypothèse, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x + y = \frac{a}{b}.$$

De plus, vu que $y \in \mathbb{Q}$, il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$y = \frac{c}{d}.$$

Ainsi,

$$x = x + y - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd},$$

et donc $x \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

Proposition 0.56 (Démonstration par contraposée)**.**
Soient A et B des énoncés. Alors, montrer que $A \Rightarrow B$ est équivalent à montrer $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Démonstration. On montre que les valeurs de vérité des énoncés $A \Rightarrow B$ et $\neg B \Rightarrow \neg A$ en fonction des valeurs de vérité de A et des valeurs de vérité B sont les mêmes (voir annexe A, page 239 pour comprendre ce qu'est une table de vérité.)
La seule façon pour que l'implication $A \Rightarrow B$ soit fausse est que A soit vrai et B soit faux, c'est-à-dire, $\neg(A \Rightarrow B) = A$ et $\neg B$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &= \neg\neg(A \Rightarrow B) \\ &= \neg(A \text{ et } \neg B) \\ &= \neg A \text{ ou } B. \end{aligned}$$

La table de vérité de $A \Rightarrow B$ est donc

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

D'un autre côté, la table de vérité de $\neg B \Rightarrow \neg A$ est

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Les deux tables de vérités étant les mêmes, les implications sont équivalentes.
Une autre façon de démontrer ceci est de prouver que si $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vrai, alors $A \Rightarrow B$ est vrai également par l'absurde.
Supposons donc que $\neg B \Rightarrow \neg A$ et que l'implication $A \Rightarrow B$ est fausse, c'est-à-dire qu'il existe des énoncés A et B tels que A est vrai et B est faux. Mais vu que B est alors faux, on a que $\neg B$ est vrai. Ainsi, par hypothèse, on a que $\neg A$ est vrai ce qui est absurde car on a alors que A et $\neg A$ sont tous deux vrais. $\square$

Remarque 0.57.
Toutes les démonstrations par contraposée peuvent être adaptées en démonstrations par l'absurde. Par contre, pas toutes les démonstrations par l'absurde peuvent être adaptées en démonstration par contraposée.

Théorème 0.58 (Démonstration par récurrence, par induction)**.**
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ tel que

(i) $P(n_0)$ est vrai. *(*Ancrage*)*

(ii) pour tout $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vrai, alors $P(n+1)$ est vrai aussi. *(*Pas de récurrence*)*

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vrai.

Démonstration. Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq n_0$ et $P(n)$ est faux$\}$.
Montrons par contraposée que A est vide. On suppose donc que $A \neq \emptyset$ et on montre qu'alors, soit $P(n_0)$ est faux soit il existe $n \geq n_0$ tel que $P(n)$ est vrai et $P(n+1)$ est faux.

Vu que A est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ il a un plus petit élément, disons $\overline{n}$. (Attention, ceci est une propriété des sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qu'on ne démontre pas mais dont on peut se convaincre. C'est faux en général pour des ensembles de nombres réels quelconques, voir la section 1.2.)
On distingue deux cas.
Cas 1 : $\overline{n} = n_0$.
Dans ce cas, on a que $P(\overline{n}) = P(n_0)$ qui est faux, qui est ce qu'il fallait démontrer.
Cas 2 : $\overline{n} > n_0$.
Dans ce cas, on a $n := \overline{n} - 1 \geq n_0$. Et, vu que $\overline{n}$ est le plus petit élément de A, on a nécessairement que $n \notin A$, c'est-à-dire $P(n)$ est vrai. Ainsi, on a $P(n)$ vrai et $P(n+1) = P(\overline{n})$ est faux qui est ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 0.59. (*i*) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Ancrage : On montre que l'égalité est vraie pour $n = 0$.
Or, si $n = 0$, le membre de gauche est $x^0 = 1$ et le membre de droite est $\frac{1-x}{1-x} = 1$. On a donc bien

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x}.$$

Pas de récurrence : On suppose que l'égalité est vraie pour n et on montre qu'elle est alors vraie pour $n + 1$, c'est-à-dire, on suppose que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{H.R.}$$

et on montre que

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \\
&\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} \\
&= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.
\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, on a le résultat.

(*ii*) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2.$$

Ancrage : On montre que l'égalité est vraie pour $n = 1$.
Or, si $n = 1$, le membre de gauche est $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et le membre de droite est $\frac{1}{4}1^1(1+1)^2 = 1$. On a donc bien

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = \frac{1}{4}1^2(1+1)^2.$$

Pas de récurrence : On suppose que l'égalité est vraie pour n et on montre qu'elle est alors vraie pour $n+1$, c'est-à-dire, on suppose que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \tag{H.R.}$$

et on montre que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 =& \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{H.R.}}{=} \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{1}{4}n^2 + n + 1\right)\\ =&\frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(*iii*) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geq -1$,

$$(1-x)^n \geq 1 + nx.$$

Ancrage : On montre que l'inégalité est vraie pour $n = 1$.
Or, si $n = 1$, le membre de gauche est $(1+x)^1 = 1+x$ et le membre de droite est $1 + 1x = 1+x$. On a donc $(1+x)^1 = 1+1x$, ce qui implique

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1x.$$

Pas de récurrence : On suppose que l'inégalité est vraie pour n et on montre qu'elle est alors vraie pour $n+1$, c'est-à-dire, on suppose que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{H.R.}$$

et on montre que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

On a

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} =& \underbrace{(1+x)^n}_{\overset{\text{H.R.}}{\geq}\ 1+nx} \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}\\ \geq& 1 + (n+1)x,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(*iv*) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)^2 - 1$ est divisible par 8.

Ancrage : On montre que si $n = 1$, $(2n+1)^2 - 1$ est divisible par 8.

On a $(2n+1)^2 - 1 = (2+1)^3 - 1 = 9 - 1 = 8$ qui est bien divisible par 8.

Pas de récurrence : On suppose que la propriété est vraie pour n et on montre qu'elle est alors vraie pour $n+1$, c'est-à-dire, on suppose que

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } (2n+1)^2 - 1 = 8k \tag{H.R.}$$

et on montre que

$$\exists l \in \mathbb{N} \text{ tel que } (2n+3)^2 - 1 = 8l.$$

Par hypothèse de récurrence, (H.R.), soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(2n+1)^2 - 1 = 8k$ et définissons $l = k + n + 1$. Alors,

$$\begin{aligned}(2n+3)^2 - 1 =& ((2n+1)+2)^2 - 1 = (2n+1)^2 + 4(2n+1) + 4 - 1\\ =& (2n+1)^2 - 1 + 4(2n+2) = 8k + 8(n+1) = 8(k+n+1) = 8l,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

Chapitre 1

Les nombres réels

1.1 Rappels

Définition 1.1 (Les réels $\mathbb{R}$)**.**
$\mathbb{R}$ est la droite réele. On peut la voir comme l'ensemble des nombres à virgules

$$x = a, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

où $a \in \mathbb{Z}$ et pour tout $k \geq 1$, $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. De plus, par convention

$$x = a, a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k 99999999 \cdots = a, a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_k + 1)00000000 \cdots$$

Définition 1.2 (valeur absolue)**.**
La valeur absolue est une fonction $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposition 1.3.
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $c \geq 0$, on a

(i) $x \leq |x|$

(ii) $|x| \leq c$ *si et seulement si* $-c \leq x \leq c$

(iii) $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

(iv) $|-x| = |x|$

(v) $|xy| = |x||y|$

(vi) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité du triangle)*

(vii) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$ *(inégalité du triangle inverse)*

Démonstration. (i) On distingue rapidement deux cas. Si $x \geq 0$, $x = |x|$ ce qui implique en particulier que $x \leq |x|$. Si $x < 0$, on a $|x| = -x > 0$, d'où, $x < 0 < |x|$, qui est le résultat voulu.

(ii) On distingue deux cas :
Cas 1 : $x \geq 0$.
Dans ce cas $|x| = x$. Ainsi, si on suppose que $|x| \leq c$, on a

$$0 \leq x \leq c.$$

Vu que $-c \leq 0$, on déduit

$$-c \leq 0 \leq x \leq c.$$

Réciproquement, si on suppose que $-c \leq x \leq c$, alors,

$$-c \leq x = |x| \leq c,$$

ce qui montre le résultat dans ce cas.

Cas 2 : $x < 0$.

Dans ce cas, $|x| = -x$. Ainsi, si on suppose que $|x| \leq c$, on a $-x \leq c$. En amplifiant cette inégalité par -1, on trouve

$$-c \leq x \leq 0 \leq c.$$

Réciproquement, si on suppose que $-c \leq x \leq c$, en amplifiant ces inégalités par -1, on trouve

$$-c \leq -x = |x| \leq c,$$

qui est le résultat voulu dans ce cas.

(iii) Si $x = 0$, on a $|x| = 0$ par définition. Réciproquement, si $|x| = 0$, par le point précédent on obtient $0 \leq x \leq 0$ ce qui n'est possible que si $x = 0$.

(iv) On distingue rapidement trois cas. Si $x = 0$, on a $-x = 0$ et donc $|x| = 0 = |-x|$. Si $x > 0$, $-x < 0$ et donc $|x| = x = |-x|$. Si $x < 0$, $-x > 0$ et donc $|x| = -x = |-x|$.

(v) On distingue 4 cas.

Cas 1 : $x, y \geq 0$.

Dans ce cas, on a $xy \geq 0$. Ainsi, $|x| = x$, $|y| = y$ et $|xy| = xy$, d'où,

$$|xy| = xy = |x||y|.$$

Cas 2 : $x < 0$ et $y \geq 0$.

Si $y = 0$, l'égalité se réduit à $0 = 0$ qui est vrai. Si $y > 0$, on a $xy < 0$ et donc $|xy| = -xy$. On déduit

$$|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$$

Cas 3 : $x \geq 0$ et $y < 0$.

La démonstration dans ce cas est exactement la même que dans le cas précédent avec les rôles de x et y inversés.

Cas 4 : $x, y < 0$.

Dans ce cas, $xy > 0$ et donc $|xy| = xy$. On déduit

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|.$$

(vi) On commence par montrer $|x + y| \leq |x| + |y|$.

On pourrait montrer le résultat en distinguant plein de cas en fonction du signe de x, x et $x + y$. On propose une démonstration un peu plus astucieuse. On commence par montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = |x|^2$. En effet, si $x > 0$, on a $x = |x|$ et donc $x^2 = |x|^2$. Si $x < 0$, $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$, ce qui montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = |x|^2$.

Maintenant, on constate

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2.$$

Par des points précédents, on a $|x||y| = |xy| \geq xy$. D'où, on déduit

$$(|x| + |y|)^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = |x + y|^2.$$

En prenant la racine des deux côtés, on a le résultat.
Pour finir la démonstration de ce point, on constate que

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

qui est le résultat voulu.

(vii) On commence par montrer $|x + y| \geq ||x| - |y||$. On a, par l'inégalité du triangle,

$$\begin{aligned} |x| =& |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \\ |y| =& |y + x - x| \leq |x + y| + |x| \end{aligned}$$

ce qui implique

$$-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|.$$

Ainsi, par un point précédent, on a

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

qui est le résultat.
Pour finir,

$$|x - y| = |x + (-y)| \geq ||x| - |-y|| = ||x| - |y||,$$

qui termine la démonstration de ce point.

□

Définition 1.4 (Intervalle)**.**
Un *intervalle* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ayant la forme

$$\begin{aligned}]a, b[=& \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} \\ ]a, +\infty[=& \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\} \\ ]-\infty, b[=& \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < b\} \\ ]-\infty, +\infty[=& \mathbb{R} \\ ]a, a[=& \emptyset \\ [a, b] =& \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \\ [a, +\infty[=& \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x\} \\ ]-\infty, b] =& \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq b\} \\ [a, b[=& \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} \\ ]a, b] =& \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Les intervalles suivants sont dits *intervalles ouverts* : $]a, b[, \ ]a, +\infty[, \ ]-\infty, b[, \ \mathbb{R}, \ \emptyset$.
Les intervalles suivants sont dits *intervalles fermés* : $[a, b], \ [a, +\infty[, \ ]-\infty, b], \ \mathbb{R}, \ \emptyset$.
En particulier, $\mathbb{R}, \ \emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés, et $[a, b[, \ ]a, b]$ ne sont ni ouverts ni fermés.

1.2 Suprémum, infimum, maximum et minimum

Définition 1.5 (minoré, minorant, majoré, majorant, borné)**.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non-vide.

(i) $x \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de A si

$$\forall a \in A,\ x \leq a.$$

(ii) $x \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de A si

$$\forall a \in A,\ x \geq a.$$

(iii) On dit que A est *minoré* si il admet un minorant, c'est-à-dire,

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \text{tel que } \forall a \in A,\ x \leq a.$$

(iv) On dit que A est *majoré* si il admet un majorant, c'est-à-dire,

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \text{tel que } \forall a \in A,\ x \geq a.$$

(v) On dit que A est *borné* si il est à la fois minoré et majoré, c'est-à-dire,

$$\exists x, y \in \mathbb{R},\ \text{tel que } \forall a \in A,\ x \leq a \leq y.$$

Remarque 1.6. (i) Un majorant M d'un ensemble A n'est pas nécessairement un élément de A.
Un minorant m d'un ensemble A n'est pas nécessairement un élément de A.

(ii) Si il existe un majorant (respectivement un minorant) alors il en existe une infinité. En effet, si x est majorant (respectivement un minorant), alors pour tout $y > x$ (respectivement $y < x$) y est aussi un majorant (respectivement minorant).

Exemple 1.7. (i) $\mathbb{N}$ est minoré mais pas majoré. En effet, si $x = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq n.$$

Par contre, $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Pour montrer ceci, on doit montrer

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > y.$$

En effet, si $y \in \mathbb{R}$ est quelconque, considérons $n = \lceil |y| \rceil + 1$. Alors, $n \in \mathbb{N}$ et

$$y \leq |y| \leq \lceil |y| \rceil < \lceil |y| \rceil + 1 = n.$$

(ii) Soit $A = \{a \in \mathbb{R} \ : \ a|a| < 2\}$. Montrons que A est majoré mais pas minoré. Dans ce genre de situation, il faut commencer par réécrire notre ensemble pour mieux pouvoir travailler.
On s'intéresse à la condition $a|a| < 2$. On distingue deux cas :
Cas 1 : si $a \geq 0$, la condition s'écrit $a^2 < 2$ ce qui est équivalent à $a < \sqrt{2}$.
Cas 2 : si $a < 0$, la condition s'écrit $-a^2 < 2$, ce qui est toujours vrai vu que $-a^2 < 0$.
En regroupant nos deux cas, on obtient que $a|a| < 2$ si et seulement si $a < \sqrt{2}$. Notre ensemble est donc

$$A = \{a \in \mathbb{R} \ : \ a < \sqrt{2}\}.$$

On déduit donc que $x = \sqrt{2}$ est un majorant de A car pour tout $a \in A$, $a \leq \sqrt{2}$. On montre pour finir que A n'est pas minoré. Pour ceci, on doit montrer

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists a \in A \text{ tel que } a < y.$$

Soit donc $y \in \mathbb{R}$ quelconque et $a = -|y| - 1$. Alors, $a < 0 < \sqrt{2}$, d'où $a \in A$ et

$$y \geq -|y| > -|y| - 1 = a,$$

qui est le résultat voulu.

Proposition 1.8.
Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Alors,

(i) si B est minoré, A est minoré.

(ii) si B est majoré, A est majoré.

Démonstration. (i) Supposons que B soit minoré, c'est-à-dire, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $x \leq b$.

On doit montrer que pour tout $a \in A$, $x \leq a$. Or, vu que $A \subset B$, quelque soit $a \in A$, on a $a \in B$. En particulier, vu que x est un minorant de B, on a $x \leq a$, ce qui montre que x est aussi un minorant de A qui est le résultat voulu.

(ii) Supposons que B soit majoré, c'est-à-dire, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in B$, $x \geq b$.

On doit montrer que pour tout $a \in A$, $x \geq a$. Or, vu que $A \subset B$, que quelque soit $a \in A$, on a $a \in B$. En particulier, vu que x est un majorant de B, on a $x \geq a$, ce qui montre que x est un majorant de A qui est le résultat voulu.

□

Théorème 1.9.
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Si A est minoré, il existe un plus grand minorant. C'est-à-dire il existe un unique minorant m tel que si x est un minorant de A, on a $m \geq x$.

(ii) Si A est majoré, il existe un plus petit majorant. C'est-à-dire il existe un unique majorant M tel que si x est un majorant de A, on a $M \leq x$.

La démonstration de ce résultat est omise.

Définition 1.10.
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Si A est minoré, le plus grand minorant est apppelé l'*infimum* de A et on le note $\inf A$.

(ii) Si A est majoré, le plus petit majorant est appelé le *suprémum* de A et on le note $\sup A$.

Théorème 1.11 (caratérisation du suprémum et infimum)**.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) $x = \inf A$ *si et seulement si*

$$\forall a \in A,\ x \leq a \ (x \text{ est un minorant de } A) \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a \leq x + \varepsilon.$$

(ii) $x = \sup A$ *si et seulement si*

$$\forall a \in A,\ x \geq a \text{ (}x \textit{ est un majorant de } A\text{)} \qquad \textit{et} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \textit{ tel que } a \geq x - \varepsilon.$$

Démonstration. (*i*) Par définition $x = \inf A$ si et seulement si x est un minorant et que c'est le plus grand minorant. On doit donc montrer que pour un minorant x, être le plus grand minorant est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a \leq x + \varepsilon.$$

Commençons par supposer que x est le plus grand minorant et soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que x est le plus grand minorant, $x+\varepsilon$ ne peut pas être un minorant. Par définition, $x + \varepsilon$ n'est pas un minorant veut dire, qu'il existe $a \in A$ tel que $a < x + \varepsilon$, ce qui montre la première partie du résultat.

Réciproquement, supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A$ tel que $a \leq x + \varepsilon$ et montrons que x est le plus grand minorant. Par l'absurde, supposons qu'il existe un minorant $y > x$ et posons $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$. Alors, par hypothèse, il existe $a \in A$ tel que

$$a \leq x + \varepsilon < x + 2\varepsilon = y,$$

ce qui contredit le fait que y est un minorant.

(*ii*) Par définition $x = \sup A$ si et seulement si x est un majorant et que c'est le plus petit majorant. On doit donc montrer que pour un majorant x, être le plus petit majorant est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a \geq x - \varepsilon.$$

Commençons par supposer que x est le plus petit majorant et soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que x est le plus petit majorant, $x-\varepsilon$ ne peut pas être un majorant. Par définition, $x - \varepsilon$ n'est pas un majorant veut dire, qu'il existe $a \in A$ tel que $a > x - \varepsilon$, ce qui montre la première partie du résultat.

Réciproquement, supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A$ tel que $a \geq x - \varepsilon$ et montrons que x est le plus petit majorant. Par l'absurde, supposons qu'il existe un majorant $y < x$ et posons $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$. Alors, par hypothèse, il existe $a \in A$ tel que

$$a \geq x - \varepsilon > x - 2\varepsilon = y,$$

ce qui contredit le fait que y est un majorant. □

Exemple 1.12.
Reprenons les exemples 1.7, page 35.

(*i*) On a vu que $\mathbb{N}$ est minoré. Montrons que $\inf \mathbb{N} = 0$. On a déjà vu que 0 est un minorant de $\mathbb{N}$, il nous reste donc à montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. En prenant $n = 0$, on a $n \in \mathbb{N}$, et $n \leq \varepsilon$, ce qui montre que $0 = \inf \mathbb{N}$.

(*ii*) Soit $A = \{a \in \mathbb{R} \ :\ a < \sqrt{2}\}$. On a vu que A est majoré. Montrons que $\sup A = \sqrt{2}$. On a déjà vu que $\sqrt{2}$ est un majorant de A. Montrons encore que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ tel que } a \geq \sqrt{2} - \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. En prenant $a = \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2}$, on a $a < \sqrt{2}$, d'où, $a \in A$ et $a \geq \sqrt{2} - \varepsilon$, ce qui montre que $\sqrt{2} = \sup A$.

Proposition 1.13.
Soit $A \subset B$, $A \neq \emptyset$. Alors,

(i) si B est minoré, $\inf A \geq \inf B$.

(ii) si B est majoré, $\sup A \leq \sup B$.

Démonstration. (i) Comme vu dans la démonstration de la proposition 1.8, page 36, n'importe quel minorant de B est un minorant de A. En particulier, $\inf B$ est un minorant de A. Vu que $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, on a $\inf A \geq \inf B$, qui est le résultat voulu.

(ii) Comme vu dans la démonstration de la proposition 1.8, page 36, n'importe quel majorant de B est un majorant de A. En particulier, $\sup B$ est un majorant de A. Vu que $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, on a $\sup A \leq \sup B$, qui est le résultat voulu.

Définition 1.14.
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) On dit que A *admet un minimum* si $\exists m \in A$ tel que $\forall a \in A,\ a \geq m$. On note alors $m = \min A$.

(ii) On dit que A *admet un maximum* si $\exists M \in A$ tel que $\forall a \in A,\ a \leq M$. On note alors $M = \max A$.

Remarque 1.15. (i) On peut reformuler : A admet un maximum (respectivement un minimum) si un élément de A est un majorant (respectivement minorant) de A.

(ii) On peut voir que A admet un maximum (respectivement un minimum) si et seulement si $\sup A \in A$ (respectivement $\inf A \in A$). On a alors $\max A = \sup A$ (respectivement $\min A = \inf A$).

(iii) Un ensemble fini admet toujours un maximum (le plus grand de ses éléments) et un minimum (le plus petit de ses éléments).

(iv) Un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ a toujours un minimum.

Exemple 1.16.
Reprenons les exemples ci dessus.

(i) On a $\min \mathbb{N} = 0$. En effet, on a vu que $0 = \inf \mathbb{N}$. Vu que $0 \in \mathbb{N}$, on a $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$.

(ii) Soit $A = \{a \in \mathbb{R} \ :\ a < \sqrt{2}\}$. Alors A n'admet pas de maximum. En effet, on a vu que $\sup A = \sqrt{2}$. Mais vu que $\sqrt{2} \notin A$, A n'admet pas de maximum.

Notation 1.17.
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Si A n'est pas minoré, on écrit $\inf A = -\infty$.

(ii) Si A n'est pas majoré, on écrit $\sup A = +\infty$.

Remarque 1.18.
Le fait qu'on écrit $\sup A = +\infty$ (respectivement $\inf A = -\infty$) ne veut pas dire que le suprémum de A (respectivement l'infimum de A) existe.

Exemple 1.19 (les intervalles)**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i) L'intervalle $I =]a, b[$ est borné. On a $\inf I = a$, $\sup I = b$. L'intervalle I n'admet pas de minimum ni de maximum.

(*ii*) L'intervalle $I =]a, +\infty[$ est minoré mais pas majoré. On a $\inf I = a$. L'intervalle I n'admet pas de minimum ni de maximum. On peut écrire dans ce cas $\sup I = +\infty$.

(*iii*) L'intervalle $I =]-\infty, b[$ est majoré mais pas minoré. On a $\sup I = b$. L'intervalle I n'admet pas de minimum ni de maximum. On peut écrire dans ce cas $\inf I = -\infty$.

(*iv*) L'intervalle $I = \mathbb{R}$ n'est ni minoré ni majoré. L'intervalle I n'admet pas de minimum ni de maximum. On peut écrire dans ce cas $\inf I = -\infty$ et $\sup I = +\infty$.

(*v*) L'intervalle $I = [a, b]$ est borné. On a $\inf I = a$, $\sup I = b$. Vu que $\inf I, \sup I \in I$, I admet un minimum et un maximum. On a $\min I = a$, $\max I = b$.

(*vi*) L'intervalle $I = [a, +\infty[$ est minoré mais pas majoré. On a $\inf I = a$. Vu que $\inf I \in I$, I admet un minimum. On a $\min I = a$. On peut écrire dans ce cas $\sup I = +\infty$.

(*vii*) L'intervalle $I =]-\infty, b]$ est majoré mais pas minoré. On a $\sup I = b$. Vu que $\sup I \in I$, I admet un maximum. On a $\max I = b$. On peut écrire dans ce cas $\inf I = -\infty$.

(*viii*) L'intervalle $I = [a, b[$ est borné. On a $\inf I = a$, $\sup I = b$ Vu que $\inf I \in I$ et $\sup I \notin I$, I admet un minimum mais pas un maximum. On a $\min I = a$.

(*ix*) L'intervalle $I =]a, b]$ est borné. On a $\inf I = a$, $\sup I = b$ Vu que $\inf I \notin I$ et $\sup I \in I$, I admet un maximum mais pas un minimum. On a $\max I = b$.

Proposition 1.20 (Caractérisation des intervalles)**.**
Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ non-vide. Alors, E est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in E$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset E$.

Démonstration. On commence par supposer que E est un intervalle. On devrait distinguer les 9 cas d'intervalles non vides, on n'en fait qu'un seul, les autres sont similaires. On montre le résultat dans le cas où $E =]x, y[$. Si $a, b \in E$ sont tels que $a \leq b$ considérons $z \in [a, b]$ quelconque. Alors,

$$x < a \leq z \leq b < y.$$

En particulier, $x < z < y$ et donc par définition, $x \in E$ Vu que z est quelconque, on a le résultat.
Passons à la contraposée. On distingue 9 cas.
Cas 1 : E n'est ni majoré ni minoré.
Montrons qu'alors, $E = \mathbb{R}$. Soit donc $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Vu que E n'est pas majoré, on a

$$\forall C \in \mathbb{R},\ \exists b \in E \text{ tel que } b > C.$$

En particulier, pour $C = x$, il existe $b \in E$ tel que $b > x$. De plus, vu que E n'est pas minoré, on a

$$\forall C \in \mathbb{R},\ \exists a \in E \text{ tel que } a < C.$$

En particulier, pour $C = x$, il existe $a \in E$ tel que $a < x$. Ainsi, $a < x < b$ et $a, b \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in]a, b[\subset [a, b] \subset E,$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $\mathbb{R} \subset E$. L'inclusion $E \subset \mathbb{R}$ étant triviale, on déduit $E = \mathbb{R}$, ce qui est le résultat voulu dans ce cas.
Cas 2 : E est minoré, $\inf E \notin E$ et E n'est pas majoré.
Montrons qu'alors, $E =]\inf E, +\infty[$ par double inclusion.
On commence par montrer que $E \subset]\inf E, +\infty[$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\inf E$ est un minorant de E, on a $\inf E \leq x$. Vu que $x \in E$ et $\inf E \notin E$, on a $x \neq \inf E$ et donc, $x > \inf E$. Par définition, ceci implique que $x \in]\inf E, +\infty[$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset]\inf E, +\infty[$.

Montrons maintenant que $]\inf E, +\infty[\subset E$. Soit donc $x \in]\inf E, +\infty[$ quelconque. On a par définition que $x > \inf E$. Soit donc $\varepsilon = x - \inf E > 0$. Par la caractérisation de l'infimum (voir théorème 1.11, page 36), on a qu'il existe $a \in E$ tel que

$$a \leq \inf E + \varepsilon = x.$$

De plus, vu que E n'est pas majoré, on a

$$\forall C \in \mathbb{R},\ \exists b \in E \text{ tel que } b > C.$$

En particulier, pour $C = x$, il existe $b \in E$ tel que $b > x$. Ainsi, $a \leq x < b$ et $a, b \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in [a, b[\subset [a, b] \subset E,$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $]\inf E, +\infty[\subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E =]\inf E, +\infty[$.
Cas 3 : E est minoré, $\inf E \in E$ et E n'est pas majoré.
Montrons qu'alors, $E = [\inf E, +\infty[$ par double inclusion.
On commence par montrer que $E \subset [\inf E, +\infty[$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\inf E$ est un minorant de E, on a $\inf E \leq x$. Par définition, ceci implique que $x \in [\inf E, +\infty[$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset [\inf E, +\infty[$.
Montrons maintenant que $[\inf E, +\infty[$. Soit donc $x \in [\inf E, +\infty[$ quelconque. On a alors $\inf E \in E$ et $\inf E \leq x$. De plus, vu que E n'est pas majoré, on a

$$\forall C \in \mathbb{R},\ \exists b \in E \text{ tel que } b > C.$$

En particulier, pour $C = x$, il existe $b \in E$ tel que $b > x$. Ainsi, $\inf E \leq x < b$ et $\inf E, b \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in [\inf E, b[\subset [\inf E, b] \subset E,$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $[\inf E, +\infty[\subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E = [\inf E, +\infty[$.
Cas 4 : E n'est pas minoré, E est majoré et $\sup E \notin E$.
Montrons qu'alors $E =]-\infty, \sup E[$ par double inclusion.
On commence par montrer que $E \subset]-\infty, \sup E[$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\sup E$ est un majorant de E, on a $x \leq \sup E$. Vu que $x \in E$ et $\sup E \notin E$, on a $x \neq \sup E$ et donc, $x < \sup E$. Par définition, ceci implique que $x \in]-\infty, \sup E[$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset]-\infty, \sup E[$.
Montrons maintenant que $]-\infty, \sup E[\subset E$. Soit donc $x \in]-\infty, \sup E[$ quelconque. On a par définition que $x < \sup E$. Soit donc $\varepsilon = \sup E - x > 0$. Par la caractérisation du supremum (voir théorème 1.11, page 36), on a qu'il existe $b \in E$ tel que

$$b \geq \sup E - \varepsilon = x$$

De plus, vu que E n'est pas minoré, on a

$$\forall C \in \mathbb{R},\ \exists a \in E \text{ tel que } a < C.$$

En particulier, pour $C = x$, il existe $a \in E$ tel que $a < x$. Ainsi, $a < x \leq b$ et $a, b \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in]a, b] \subset [a, b] \subset E,$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $]-\infty, \sup E[\subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E =]-\infty, \sup E[$.

Cas 5 : E n'est pas minoré, E est majoré et $\sup E \in E$.
Montrons qu'alors $E =]-\infty, \sup E]$ par double inclusion.
On commence pas montrer que $E \subset]-\infty, \sup E]$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\sup E$ est un majorant de E, on a $x \leq \sup E$. Par définition, ceci implique que $x \in]-\infty, \sup E]$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset]-\infty, \sup E]$.
Montrons maintenant que $]-\infty, \subset E] \subset E$. Soit donc $x \in]-\infty, \subset E]$ quelconque. On a alors $\sup E \in E$ et $x \leq \sup E$. De plus, vu que E n'est pas minoré, on a

$$\forall C \in \mathbb{R},\ \exists a \in E \text{ tel que } a < C.$$

En particulier, pour $C = x$, il existe $a \in E$ tel que $a < x$. Ainsi, $a < x \leq \sup E$ et $a, \sup E \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in]a, b] \subset [a, b] \subset E,$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $]-\infty, \sup E[\subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E =]-\infty, \sup E[$.
Cas 6 : E est borné, $\inf E \notin E$ et $\sup E \notin E$.
Montrons qu'alors $E =]\inf E, \sup E[$ par double inclusion.
On commence par montrer que $E \subset]\inf E, \sup E[$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\inf E$ est un minorant de E et $\sup E$ est un majorant de E, on a $\inf E \leq x \leq \sup E$. De plus, vu que $x \in E$, $\inf E \notin E$ et $\sup E \notin E$, on a $\inf E \neq x \neq \sup E$ et donc $\inf E < x < \sup E$. Par définition, ceci implique que $x \in]\inf E, \sup E[$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset]\inf E, \sup E[$.
Montrons maintenant que $]\inf E, \sup E[\subset E$. Soit donc $x \in]\inf E, \sup E[$ quelconque. On a par définition que $\inf E < x < \sup E$. Soit donc $\varepsilon_1 = x - \inf E > 0$ et $\varepsilon_2 = \sup E - x > 0$. Par la caractérisation de l'infimum et du supremum (voir théorème 1.11, page 36), on a qu'il existe $a, b \in E$ tels que

$$\begin{aligned} a &\leq \inf E + \varepsilon_1 = x \\ b &\geq \sup E - \varepsilon_2 = x. \end{aligned}$$

Ainsi, $a \leq x \leq b$ et $a, b \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in [a, b] \subset E$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $]\inf E, \sup E[\subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E =]\inf E, \sup E[$.
Cas 7 : E est borné, $\inf E \in E$ et $\sup E \notin E$.
Montrons qu'alors, $E = [\inf E, \sup E[$ par double inclusion.
On commence par montrer que $E \subset [\inf E, \sup E[$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\inf E$ est un minorant de E et $\sup E$ est un majorant de E, on a $\inf E \leq x \leq \sup E$. De plus, vu que $x \in E$ et $\sup E \notin E$, on a $x \neq \sup E$ et donc $\inf E \leq x < \sup E$. Par définition, ceci implique que $x \in [\inf E, \sup E[$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset [\inf E, \sup E[$.
Montrons maintenant que $[\inf E, \sup E[\subset E$. Soit donc $x \in E$ quelconque. On a par définition que $\inf E \leq x < \sup E$. Soit donc $\varepsilon = \sup E - x > 0$. Par la caractérisation du supremum (voir théorème 1.11, page 36), on a qu'il existe $b \in E$ tel que

$$b \geq \sup E - \varepsilon = x.$$

Ainsi, $\inf E \leq x \leq b$ et $\inf E, b \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in [\inf E, b] \subset E$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $[\inf E, \sup E[\subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E = E = [\inf E, \sup E[$.
Cas 8 : E est borné, $\inf E \notin E$ et $\sup E \in E$.
Montrons qu'alors, $E =]\inf E, \sup E]$ par double inclusion.
On commence par montrer que $E \subset]\inf E, \sup E]$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\inf E$ est un minorant de E et $\sup E$ est un majorant de E, on a $\inf E \leq x \leq \sup E$. De plus, vu que $x \in E$ et $\inf E \notin E$, on a $x \neq \inf E$ et donc $\inf E < x \leq \sup E$. Par définition, ceci implique que $x \in]\inf E, \sup E]$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset]\inf E, \sup E]$.
Montrons maintenant que $]\inf E, \sup E] \subset E$. Soit donc $x \in E$ quelconque. On a par définition que $\inf E < x \leq \sup E$. Soit donc $\varepsilon = x - \inf E > 0$. Par la caractérisation de l'infimum (voir théorème 1.11, page 36), on a qu'il existe $a \in E$ tel que

$$a \leq \inf E + \varepsilon = x.$$

Ainsi, $a \leq x \leq \sup E$ et $a, \sup E \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in [a, \sup E] \subset E$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $]\inf E, \sup E] \subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E =]\inf E, \sup E]$.
Cas 9 : E est borné, $\inf E \in E$ et $\sup E \in E$.
Montrons qu'alors, $E = [\inf E, \sup E]$ par double inclusion.
On commence par montrer que $E \subset [\inf E, \sup E]$. Soit donc $x \in E$ quelconque. Vu que $\inf E$ est un minorant de E et $\sup E$ est un majorant de E, on a $\inf E \leq x \leq \sup E$. Par définition, ceci implique que $x \in [\inf E, \sup E]$. x étant quelconque, on a bien que $E \subset [\inf E, \sup E]$.
Montrons maintenant que $[\inf E, \sup E] \subset E$. Soit donc $x \in E$ quelconque. On a par définition que $\inf E \leq x \leq \sup E$.
Ainsi, $\inf E \leq x \leq \sup E$ et $\inf E, \sup E \in E$. Par hypothèse, on a donc

$$x \in [\inf E, \sup E] \subset E$$

ce qui montre que $x \in E$. Vu que x est quelconque, on a $[\inf E, \sup E] \subset E$.
Les deux inclusions montrent bien que $E = [\inf E, \sup E]$.

1.3 Quelques propriétés de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Théorème 1.21. *(i) Les rationnels sont* denses *dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$.*

(ii) Les irrationnels sont denses *dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, il existe $q \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$.*

La démonstration de ce résultat est omise.

Exemple 1.22.
Voyons un exemple d'utilisation de ceci. Soit $A =]-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. Utilisons ce théorème pour montrer que $\sup A = \sqrt{2}$. On a $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \in \mathbb{Q}, \ x \leq \sqrt{2}\}$. On voit ici que pour tout $x \in A$, $x \leq \sqrt{2}$, donc $\sqrt{2}$ est un majorant de A. Pour montrer que $\sqrt{2} = \sup A$ il nous faut voir que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A \text{ tel que } x \geq \sqrt{2} - \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Alors, on a $\sqrt{2} - \varepsilon < \sqrt{2}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} - \varepsilon < q < \sqrt{2}$. Remarquons qu'alors, $q \in A$ et donc on a bien montré ce qu'il fallait pour avoir que $\sup A = \sqrt{2}$.
Remarquons encore que A n'admet pas de maximum. En effet, $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $\sup A \notin A$ et donc A n'admet pas de maximum.

Théorème 1.23. *(i) Les rationnels sont dénombrables. C'est-à-dire, il existe un fonction bijective* $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

(ii) Les réels sont indénombrables. C'est-à-dire, il n'existe pas de fonction bijective $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

La démonstration de ce résultat est omise.

Chapitre 2

Le plan complexe $\mathbb{C}$

2.1 Les nombres complexes et leurs représentations

Définition 2.1 (Les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$)**.**
On définit le *plan complexe* par

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \colon x, y \in \mathbb{R}\}$$

où $i^2 = -1$.
Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est un *nombre complexe* avec $x, y \in \mathbb{R}$, on appelle x la *partie réelle* de z et on écrit $\mathrm{Re}(z) = x$. De plus, on appelle y la *partie imaginaire* de z et on écrit $\mathrm{Im}(z) = y$.
On définit l'addition et la soustraction de nombres complexes de la façon suivante : pour $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 =& (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 z_2 =& (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Pour finir, on définit

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Définition 2.2 (module, conjugué)**.**
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Le *conjugué (complexe)* de z, noté $\overline{z}$ est défini par

$$\overline{z} = x - iy.$$

Le *module* de z, noté $|z|$ est défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposition 2.3.
Pour tous $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(iv) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

(v) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ *et* $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

(vi) $|\overline{z}| = |z|$

(vii) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(viii) *si* $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

(ix) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Démonstration. (i) On a

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(x+iy)}} = \overline{(x-iy)} = \overline{(x+i(-y))} = x - i(-y) = x + iy = z$$

(ii) Soit pour $k = 1, 2$, $x_k = \mathrm{Re}(z_k)$ et $y_k = \mathrm{Im}(z_k)$. On a alors

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} =& \overline{(x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ =& (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(iii) Soit pour $k = 1, 2$, $x_k = \mathrm{Re}(z_k)$ et $y_k = \mathrm{Im}(z_k)$. On a alors

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} =& \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\ =& \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ =& x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ =& x_1x_2 - (-y_1)(-y_2) + i(x_1(-y_2) + x_2(-y_1)) \\ =& (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ =& \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\end{aligned}$$

(iv) On a

$$\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \frac{1}{2}2x = x = \mathrm{Re}(z)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) =& \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy)) = \frac{1}{2i}2iy = y \\ =& \mathrm{Im}(z)\end{aligned}$$

qui sont les résultats voulus.

(v) On a

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

qui est bien un nombre réel. De plus, il suit de la définition du module de z que

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

(vi) On a

$$|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z} \cdot \overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}z} = |z|$$

(vii) On a

$$|z_1z_2| = \sqrt{z_1z_2\overline{z_1z_2}} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} = |z_1||z_2|,$$

qui est le résultat voulu.

(*viii*) On a

$$
\begin{aligned}
|z^{-1}| =& \left|\frac{1}{x+iy}\right| = \left|\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right| \\
=& \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{|z|} \\
=& |z|^{-1}.
\end{aligned}
$$

(*ix*) Soit pour $k = 1, 2$, $x_k = \mathrm{Re}(z_k)$ et $y_k = \mathrm{Im}(z_k)$. On a alors

$$
\begin{aligned}
(|z_1| + |z_2|)^2 =& \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2 \\
=& x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \\
=& x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} \\
=& x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\
&+ 2\sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2} \\
=& x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2 \underbrace{+ (x_1y_2 - x_2y_1)^2}_{\geq 0}} \\
\geq& x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2} \\
=& x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2|x_1x_2 + y_1y_2|
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait qu'un nombre est toujours plus petit que sa valeur absolue, on déduit

$$
\begin{aligned}
(|z_1| + |z_2|)^2 \geq& x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
=& (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 \\
=& |(x_1+x_2) + i(y_1+y_2)|^2 \\
=& |z_1 + z_2|^2.
\end{aligned}
$$

En prenant la racine des deux côtés de l'inégalité, on a le résultat.

□

Remarque 2.4 (Représentation cartésienne des nombres complexes)**.**
On peut identifier $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En effet, la partie réelle d'un nombre complexe joue le rôle de la première composante d'un point du plan tandis que la partie imaginaire joue le rôle de la deuxième composante. On peut donc représenter un nombre complexe par un point du plan.

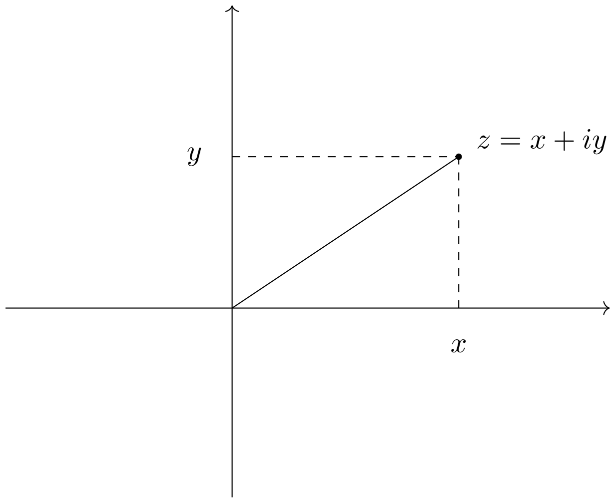
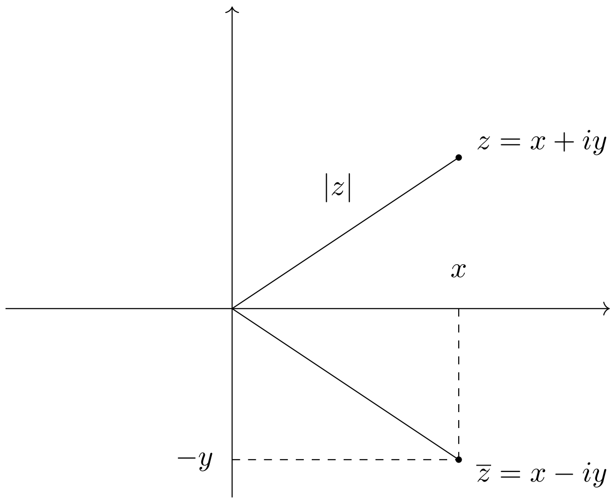
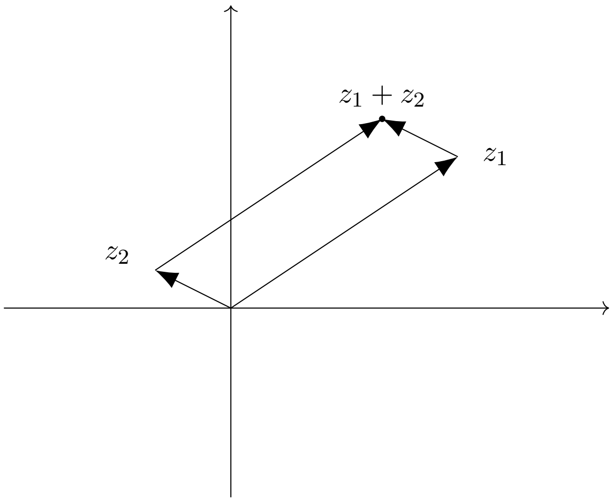


FIGURE 2.1 – Représentation cartésienne d'un nombre complexe

Dans cette représentation, le module de z, $|z|$ est la distance qui sépare le point z de l'origine et prendre le conjugué correspond à faire une symétrie axiale d'axe horizontal.



L'addition de nombres complexe peut aussi être vue comme l'addition de vecteurs dans cette représentation.



Remarque 2.5 (représentation polaire des nombres complexes)**.**
On peut aussi représenter un nombre complexe à l'aide d'une distance à l'origine r et d'un angle φ.

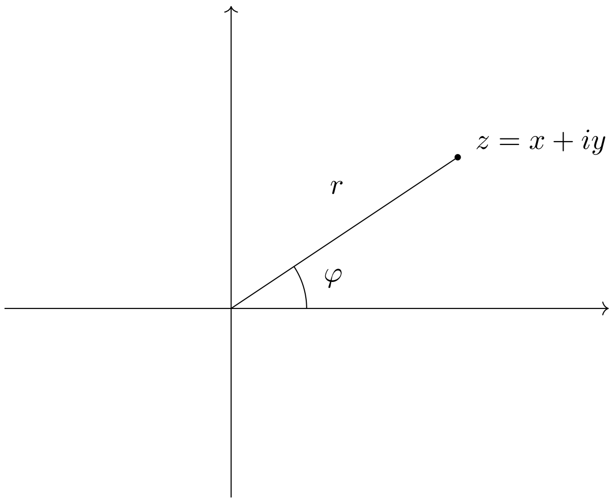


FIGURE 2.2 – Représentation polaire d'un nombre complexe

Si φ et r sont donnés, on retrouve le nombre complexe z à l'aide de la formule

$$z = r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Si z est donné et qu'on cherche r et φ, on obtient r par la formule

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Pour φ, une formule est, si $z = x + iy \neq 0$,

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} \tag{2.5.1}$$

On obtient ainsi $\varphi \in [0, 2\pi[$.

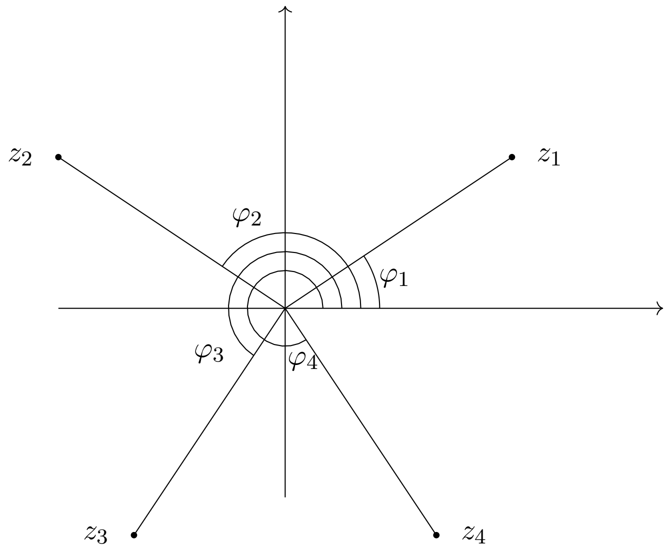


FIGURE 2.3 – Exemples d'angles φ pour z dans les différents cadrants du plan avec la formule (2.5.1)

Remarquons que la question de trouver φ tel que

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

a une infinité de réponses. En effet, par 2π périodicité de cos et sin, si $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = \cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)$$

Il existe donc une infinité de formules différentes pour trouver un φ. Un autre exemple est

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} \tag{2.5.2}$$

On obtient ainsi $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

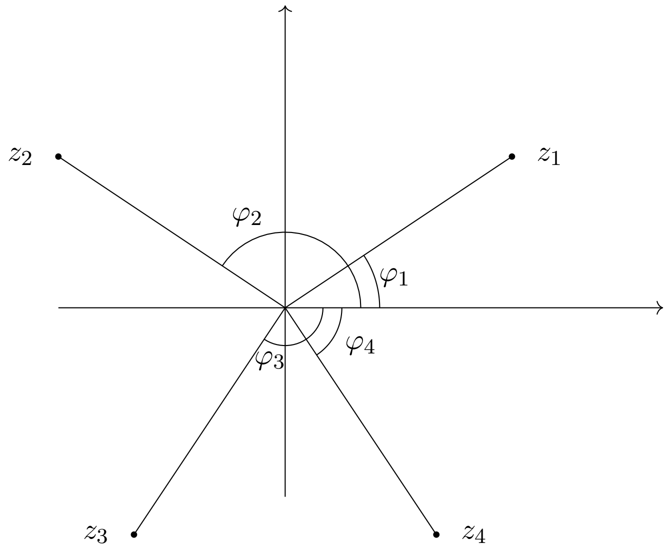


FIGURE 2.4 – Exemples d'angles φ pour z dans les différents cadrants du plan avec la formule (2.5.2)

On peut constater que nos deux formules donnent le même résultat pour des nombres complexes dans le demi-plan supérieur ($\varphi \in [0, \pi]$) et diffèrent de 2π sur le demi-plan inférieur.
Malgré ce problème avec la définition de φ, la représentation polaire permet de rapidement calculer le produit de deux nombres complexes.
En effet, si $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$, alors,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 =& r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ =& r_1 r_2 (\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \\ & \quad + i(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)). \end{aligned}$$

En utilisant les formules trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(a+b) =& \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) =& \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

on déduit

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Or cette dernière écriture est la représentation polaire du nombre complexe $z_1 z_2$ avec distance à l'origine $r_1 r_2$ et angle $\varphi_1 + \varphi_2$.

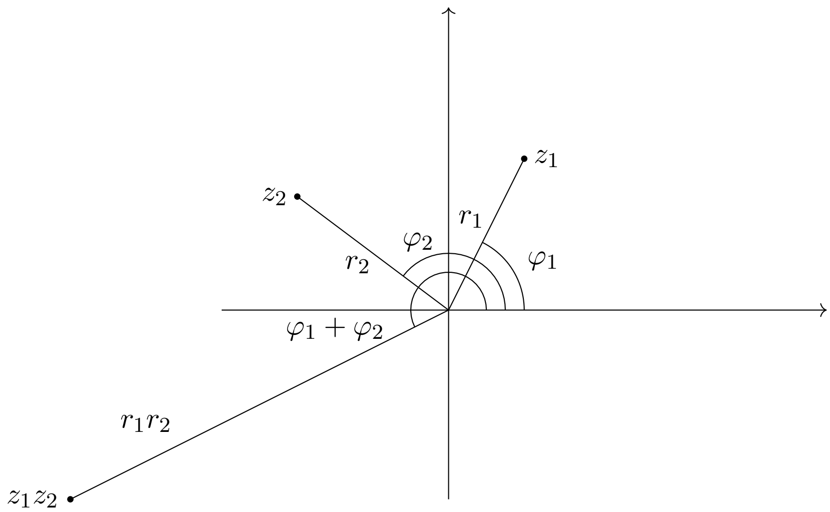


FIGURE 2.5 – Représentation polaire d'une multiplication de deux nombres complexes

Définition 2.6 (argument)**.**
Pour $z \in \mathbb{C}$, si $\varphi \in \mathbb{R}$ est tel que

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

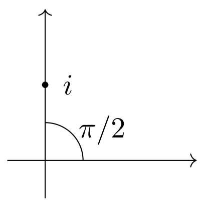
alors, on dit que φ est un *argument* de z et on note $\varphi = \arg(z)$ de telle sorte que

$$\boxed{z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))).}$$

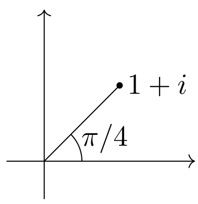
Remarque 2.7. (*i*) Pour tout nombre complexe, un argument existe.

(*ii*) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près. Pour $z = 0$, n'importe quel φ fait l'affaire, mais on s'intéresse rarement à l'argument de 0.

Exemple 2.8. (*i*) $i = 0 + i \cdot 1 = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$. Donc $\pi/2$ est un argument de i.

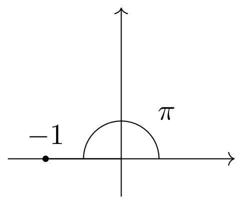


(*ii*) $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Donc $\pi/4$ est un argument de $1 + i$.



(*iii*) $14 = 14 + i \cdot 0 = 14(\cos(0) + i\sin(0))$, donc 0 est un argument de 14.

(*iv*) $-1 = -1 + i \cdot 0 = 1(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$. Donc π est un argument de -1.



Proposition 2.9.
Pour tous $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

(i) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$

(ii) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(iii) si $z \neq 0$, $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$.

Démonstration. (*i*) Si $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$, alors, par définition du conjugué,

$$\overline{z} = |z|(\cos(\arg(z)) - i\sin(\arg(z))).$$

De plus, vu que $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$, on déduit

$$\overline{z} = |z|(\cos(-\arg(z)) + i\sin(-\arg(z))).$$

On a donc bien $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

(*ii*) La démonstration consiste à faire le même calcul que dans la remarque 2.5 :
Si $z_1 = |z_1|(\cos(\arg(z_1)) + i\sin(\arg(z_1)))$ et $z_2 = |z_2|(\cos(\arg(z_2)) + i\sin(\arg(z_2)))$, alors,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 =& |z_1||z_2|(\cos(\arg(z_1)) + i\sin(\arg(z_1)))(\cos(\arg(z_2)) + i\sin(\arg(z_2))) \\ =& |z_1||z_2|(\cos(\arg(z_1))\cos(\arg(z_2)) - \sin(\arg(z_1))\sin(\arg(z_2)) \\ &+ i(\cos(\arg(z_1))\sin(\arg(z_2)) + \sin(\arg(z_1))\cos(\arg(z_2)))). \end{aligned}$$

En utilisant les formules trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(a+b) =& \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) =& \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

on déduit

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\arg(z_1) + \arg(z_2)) + i\sin(\arg(z_1) + \arg(z_2))),$$

qui est le résultat voulu.

(*iii*) si $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$, alors,

$$\begin{aligned} z^{-1} =& \frac{1}{|z|}\frac{1}{\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))} \\ =& \frac{1}{|z|}\frac{\cos(\arg(z)) - i\sin(\arg(z))}{\cos^2(\arg(z)) + \sin^2(\arg(z))} \end{aligned}$$

En utilisant que $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$ et $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on déduit

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\arg(z)) + i\sin(-\arg(z))),$$

qui est le résultat voulu. □

Remarque 2.10.
Comme mentionné dans la remarque 2.7, page 51 , l'argument n'est défini qu'à 2π près. La proposition s'interprète donc de la façon suivante :

(i) si φ est un argument de z, $-\varphi$ est un argument de $\overline{z}$

(ii) si φ_1 est un argument de z_1 et φ_2 est un argument de z_2, $\varphi_1 + \varphi_2$ est un argument de $z_1 z_2$

(iii) si φ est un argument de z, $-\varphi$ est un argument de z^{-1}.

2.2 La fonction exponentielle, les formules d'Euler et de Moivre

Définition 2.11 (fonction exponentielle)**.**
On définit l'*exponentielle complexe*

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto e^z$$

par

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z)))$$

ou encore, si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Exemple 2.12. (i) Si $x \in \mathbb{R}$, la définition ci-dessus coïncide avec l'exponentielle réelle :

$$e^{x+i\cdot 0} = e^x(\cos(0) + i\sin(0)) = e^x$$

(ii) $e^i = e^{0+i\cdot 1} = e^0(\cos(1) + i\sin(1)) = \cos(1) + i\sin(1)$.

(iii) $e^{i\pi} = e^{0+i\cdot\pi} = e^0(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1$. On retrouve ainsi une célèbre formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Remarque 2.13.
À l'aide de l'exponentielle, on peut écrire la représentation polaire d'un nombre complexe de façon très concise :

$$\boxed{z = |z|e^{i\arg(z)}}$$

Proposition 2.14.
Pour tous $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

(i) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

(ii) $\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z)$

(iii) $e^{z+i2n\pi} = e^z$

(iv) si $e^{z_1} = e^{z_2}$, alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + i2k\pi$

(v) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

(vi) $(e^z)^n = e^{zn}$

(vii) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

Démonstration. (*i*) On peut constater que la définition de l'exponentielle complexe est la donnée d'un nombre complexe sous forme polaire :

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))).$$

Comme discuté dans la remarque 2.5, on a alors

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

Revérifions quand même à l'aide de la définition. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(e^z) =& e^{\mathrm{Re}(z)}\cos(\mathrm{Im}(z))\\ \mathrm{Im}(e^z) =& e^{\mathrm{Re}(z)}\sin(\mathrm{Im}(z)).\end{aligned}$$

En utilisant la définition du module,

$$\begin{aligned}|e^z| =& \sqrt{\left(e^{\mathrm{Re}(z)}\cos(\mathrm{Im}(z))\right)^2 + \left(e^{\mathrm{Re}(z)}\sin(\mathrm{Im}(z))\right)^2}\\ =& |e^{\mathrm{Re}(z)}|\sqrt{\cos^2(\mathrm{Im}(z)) + \sin^2(\mathrm{Im}(z))}.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que l'exponenetielle réelle est toujours positive et le fait que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on déduit

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

(*ii*) Comme discuté plus haut, la définition de l'exponentielle complexe est la donnée d'un nombre complexe sous forme polaire

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z))).$$

Par définition, on a donc que $\mathrm{Im}(z)$ est bien un argument de e^z qui est le résultat voulu.

(*iii*) Si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}e^{z+i2n\pi} =& e^{x+i(y+2n\pi)} = e^x(\cos(y + 2n\pi) + i\sin(y + 2n\pi))\\ =& e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^z,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(*iv*) Si $e^{z_1} = e^{z_2}$, on a par un point précédent

$$e^{\mathrm{Re}(z_1)} = |e^{z_1}| = |e^{z_2}| = e^{\mathrm{Re}(z_2)}. \tag{2.14.1}$$

En prenant le log des deux côtés, on déduit que $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$. De plus,

$$\begin{aligned}\cos(\mathrm{Im}(z_1)) + i\sin(\mathrm{Im}(z_1)) =& \frac{e^{z_1}}{e^{\mathrm{Re}(z_1)}} \overset{(2.14.1)}{=} \frac{e^{z_2}}{e^{\mathrm{Re}(z_2)}}\\ =& \cos(\mathrm{Im}(z_2)) + i\sin(\mathrm{Im}(z_2))\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de la dernière équation, on déduit qu'on doit avoir

$$\begin{cases}\cos(\mathrm{Im}(z_1)) = & \cos(\mathrm{Im}(z_2))\\ \sin(\mathrm{Im}(z_1)) = & \sin(\mathrm{Im}(z_2))\end{cases}$$

De la première équation, on déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{Im}(z_1) = \pm \operatorname{Im}(z_2) + 2k\pi$ En injectant dans la deuxième équation, on déduit que $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) + 2k\pi$. On conclut donc que

$$z_1 = \operatorname{Re}(z_1) + i \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) + i \operatorname{Im}(z_2) + i2k\pi = z_2 + i2k\pi,$$

qui est le résultat voulu.

(v) Si pour $k = 1, 2$, on pose $x_k = \operatorname{Re}(z_k)$ et $y_k = \operatorname{Im}(z_k)$, on a

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} =& e^{x_1}(\cos(y_1) + i \sin(y_1)) e^{x_2}(\cos(y_2) + i \sin(y_2)) \\ =& e^{x_1+x_2}(\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2) \\ & \quad + i(\cos(y_1)\sin(y_2)\sin(y_1)\cos(y_2)). \end{aligned}$$

En utilisant les formules trigonométriques, on obtient

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} =& e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ =& e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(vi) On sépare la démonstration en 3 étapes.
Étape 1 : On montre le résultat pour $n \geq 0$ par récurrence.
Ancrage : le résultat est vrai pour $n = 0$, car l'égalité se réduit à $1 = 1$.
Pas de récurrence : Supposons que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'alors il est aussi vrai pour $n + 1$:

$$(e^z)^{n+1} = (e^z)^n e^z \overset{\text{H.R.}}{=} e^{nz} e^z = e^{nz+z} = e^{(n+1)z}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 2 : On montre que $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.
Pour ceci, on montre que e^{-z} est l'inverse de e^z, c'est-à-dire, $e^z e^{-z} = 1$. On a, par un point précédent,

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$$

Étape 3 : On conclut.
Si $n \geq 0$, l'étape 1 nous donne le résultat.
Si $n < 0$, on a

$$(e^z)^n = (e^z)^{-|n|} = \left((e^z)^{|n|}\right)^{-1} \overset{\text{Étape 1}}{=} \left(e^{|n|z}\right)^{-1} \overset{\text{Étape 2}}{=} e^{-|n|z} = e^{nz}$$

qui est le résultat voulu.

(vii) On a

$$\begin{aligned} \overline{e^z} =& \overline{e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)) + i e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z))} \\ =& e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z)) - i e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z)) \\ =& e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(-\operatorname{Im}(z)) + i e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(-\operatorname{Im}(z)) \\ =& e^{\operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)} = e^{\overline{z}}, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

□

Théorème 2.15 (Formules d'Euler)**.**
Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) =& \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\\ \sin(\varphi) =& \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\end{aligned}$$

Démonstration. On a, par définition de l'exponentielle complexe,

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} =& \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)+\cos(\varphi)-i\sin(\varphi)\right)=\cos(\varphi)\\ \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} =& \frac{1}{2i}\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)-\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right)=\sin(\varphi)\end{aligned}$$

□

Remarque 2.16. (*i*) On peut utiliser les formules ci-dessus pour définir $\sin(z)$ et $\cos(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$, vu que le membre de droite est défini pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(*ii*) Les formules ci-dessus sont utiles pour retrouver certaines identités trigonométriques. Par exemple :

$$\begin{aligned}\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 =& \frac{e^{i2x}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-i2x}}{4} = \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2}{4}\\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}+1\right) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1).\end{aligned}$$

Théorème 2.17 (Formule de Moivre)**.**
Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. Alors,*

$$(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi).$$

Démonstration. On a, par la proposition 2.14

$$(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)$$

□

Exemple 2.18.
Calculons rapidement $(1+i)^8$. On a,

$$1+i=\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)),$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 (\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))^8 =& 2^4(\cos(8\cdot\pi/4)+i\sin(8\cdot\pi/4))\\ =& 16(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)) = 16.\end{aligned}$$

2.3 Résolution d'équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.19 (Les racines $n$èmes)**.**
Soit $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*.*
Alors, il existe n *nombres complexes distincts* $z_0, z_1, ..., z_{n-1} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *tels que pour tout* $k = 0, 1, ..., n-1,$

$$z_k^n = w$$

Démonstration. Soit pour $k = 0, 1, ..., n,$

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(w)+2k\pi}{n}}.$$

Nous avons deux choses à montrer : Premièrement $z_k^n = w$ et deuxièmement, les z_k sont distincts.
Commençons par montrer que $z_k^n = w$. On a

$$z_k^n = |w| \left(e^{i\frac{arg(w)+2k\pi}{n}}\right)^n = |w|e^{i(\arg(w)+2k\pi)} = |w|e^{i\arg(w)} = w.$$

Montrons maintenant que les z_k sont distincts, par contraposée. On considère $k, l \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ et on suppose que $z_k = z_l$. On veut montrer qu'alors $k = l$. On a

$$|w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(w)+2k\pi}{n}} = z_k = z_l = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(w)+2l\pi}{n}}$$

Amplifiant l'identité par $|w|^{-\frac{1}{n}} e^{-i\frac{\arg(w)}{n}}$, on obtient

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2l\pi}{n}}.$$

Par la proposition 2.14, on déduit qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$i\frac{2k\pi}{n} = i\frac{2l\pi}{n} + i2m\pi.$$

Divisant par $2\pi i$ on trouve

$$\frac{k}{n} = \frac{l}{n} + m$$

ce qui est équivalent à

$$m = \frac{k-l}{n}.$$

Remarquons que vu que $0 \leq k, l \leq n-1$, on a

$$-(n-1) \leq k - l \leq n - 1$$

et donc

$$-1 < -\frac{n-1}{n} \leq \frac{k-l}{n} \leq \frac{n-1}{n} < 1.$$

Vu que $m = \frac{k-l}{n}$, ceci implique $-1 < m < 1$. Or $m \in \mathbb{Z}$, donc la seule possibilité est $m = 0$ et on déduit $k = l$, qui est le résultat voulu.

Remarque 2.20.
Cette proposition nous dit qu'il existe exactement n solutions complexes de $z^n = w$. Pour

trouver ces solutions, on peut procéder de la façon suivante : On calcule $|w|$ et on trouve un argument de w, $\arg(w)$. Ensuite on écrit

$$w = |w|e^{i(\arg(w)+2k\pi)}.$$

Puis, on multiplie tous les exposants par $1/n$ ce qui est similaire à prendre la racine $n$ème dans les réels :

$$|w|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg(w)+2k\pi}{n}}.$$

En prenant $k = 0, 1, ..., n-1$, on obtient les n solutions distinctes de $z^n = w$. Remarquons ici que si on prend $k = n$, alors, la formule nous donne la même chose que pour $k = 0$:

$$|w|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg(w)+2n\pi}{n}} = |w|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg(w)}{n}+i2\pi} = |w|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg(w)}{n}}.$$

C'est la raison pour laquelle on s'arrête à $k = n-1$, car $k \geq n$ nous redonne un nombre complexe qu'on avait déjà avec $0 \leq k \leq n-1$.

Définition 2.21 (Racine $n$ème)**.**
Si $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, les $z_k = |w|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg w+2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$ sont les *racines $n$ème* de w.

Exemple 2.22. (i) les racines 4èmes de 1.
On a $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$, car $1 = 1e^{i0}$. On écrit

$$1 = 1e^{i2k\pi}.$$

On divise nos exposants par 4 :

$$z_k = 1^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{k\pi}{2}}.$$

On obtient alors $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$ et $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

(ii) les racines 2èmes de $-i$.
On a $|-i| = 1$ et $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$. On écrit

$$-i = 1e^{i\frac{3\pi}{2}+i2k\pi}.$$

On divise nos exposants par 2 :

$$z_k = 1^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}+ik\pi}.$$

On obtient alors $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

(iii) les racines 4èmes de $1+i$.
On a $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. On écrit

$$1 + i = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}+i2k\pi}$$

On divise nos exposants par 4 :

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}+i\frac{k\pi}{2}},$$

qui sont les racines 4èmes de $1+i$.

Remarque 2.23. (i) Les n racines $n$èmes d'un nombre complex w sont toujours uniformément réparties sur un cercle centré en 0 de rayon $|w|^{\frac{1}{n}}$.

(ii) si $n = 2$, on peut trouver les racines 2èmes d'un nombre complexe à l'aide d'une autre méthode. On écrit $z = x + iy$, on identifie partie réelle et imaginaire de l'équation $z^2 = w$ (ce qui nous donne deux équations) et on résout un système de deux équations à 2 inconnues :

Si $z = x + iy$ est l'inconnue et $w = a + ib$ est la donnée, on peut réécrire $z^2 = w$ comme

$$x^2 - y^2 + i2xy = a + ib$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, on trouve

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (2.23.1) \\ \quad 2xy = b & (2.23.2) \end{cases}$$

On distingue alors 2 cas :

Cas 1 : $b \neq 0$.

(2.23.2) implique alors que x et y sont non-nuls. On a donc $y = \frac{b}{2x}$ et en injectant ceci dans (2.23.1), on obtient

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a.$$

En amplifiant par x^2, ceci est équivalent à

$$(x^2)^2 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$

On résout ensuite pour x^2 et x, mais attention, on obtient ainsi 4 solutions a priori. Il faut voir dans le contexte ce qui est possible et ce qui ne l'est pas en se rappelant, entre autre, que x doit être réel.

On pose pour finir $y = \frac{b}{2x}$ et $z = x + iy$ pour trouver les solutions.

Cas 2 : $b = 0$.

Dans ce cas, on cherche en fait les racines 2èmes d'un nombre réel.

Si $a \geq 0$, on a $x = \pm\sqrt{a}$ et $y = 0$. Si $a < 0$, on a $x = 0$ et $y = \pm\sqrt{|a|}$.

Exemple 2.24.

Cherchons les solutions de $z^2 = 3 + 4i$. Ici, $b = 4 \neq 0$. On résout donc

$$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0.$$

La méthode du discriminant nous donne

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}.$$

Vue que $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle, on ne garde que $x^2 = 4$ dont les solutions sont $x = \pm 2$. Ainsi, $y = 4/2x = \pm 1$. On trouve donc

$$z_0 = -2 - i \text{ et } z_1 = 2 + i$$

Vérifions :

$$z_k^2 = 4 - 1 + i2 \cdot 2 \cdot 1 = 3 + 4i,$$

qui est bien ce qu'on veut.

Théorème 2.25 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*,* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ *tel que* $a_n \neq 0$ *et le polynôme de degré* n *:*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n$$

Alors, p *admet* n *racines dans* $\mathbb{C}$*. Plus précisément, il existe* $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *pas nécessairement distincts tel que*

(i) Pour tout $k = 1, ..., n$*, on a* $p(z_k) = 0$*.*

(ii) On a

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

La démonstration de ceci faisant intervenir des outils plus avancés d'analyse II-IV, elle est omise.

Remarque 2.26. (i) La factorisation de polynômes et la résolution d'équations polynomiales étant intimement liées, ce théorème nous guarantit à la fois l'existence d'une factorisation de n'importe quel polynôme p et l'existence de solutions à l'équation $p(z) = 0$.

Néanmoins, ce théorème ne nous donne pas d'outil pour trouver la factorisation ou les solutions.

(ii) Une méthode pour trouver une factorisation consiste à trouver une racine du polynôme z_0 en la devinant, puis en faisant la division euclidienne de notre polynôme par $z - z_0$. On propose ici de voir où commencer à chercher une racine dans le cas où on doit la deviner.

En évaluant le polynôme en 0, on remarque que

$$a_0 = p(0) = a_n \prod_{k=1}^{n} (-z_k) = (-1)^n a_n \prod z_k.$$

Ainsi, a_0/a_n est, au signe près la multiplication de toutes les racines du polynôme. Ainsi, dans le cas où a_0/a_n est un nombre entier, une stratégie peut être de commencer par vérifier si il n'y a pas une racine qui se cache dans les diviseurs de a_0/a_n.

Exemple 2.27.
Soit

$$p(z) = -3z^3 - (6 - 6i)z^2 + (3 + 12i)z + 6.$$

Dans cette exemple, on a $n = 3$, $a_3 = -3$, $a_2 = -6 + 6i$, $a_1 = 3 + 12i$ et $a_0 = 6$.
On peut factoriser ce polynôme (si on utilise l'idée décrite dans la remarque 2.26, on trouve -2 comme racine) en

$$p(z) = -3(z - i)^2(z + 2).$$

On a donc $z_1 = i$, $z_2 = i$ et $z_3 = -2$.

Remarque 2.28 (Résolution d'équations polynomiales du degré 2 à l'aide du discriminant)**.**
Dans $\mathbb{R}$, on sait que les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ceci reste vrai dans les complexes à condition de remplacer $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ par les deux racines 2èmes du nombre complexe b^2-4ac (remarquons au passage que si b^2-4ac est un nombre réel positif, alors $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ sont les deux racines 2èmes de b^2-4ac.) Ainsi, si $w_0 \neq w_1$ sont tels que $w_0^2 = w_1^2 = b^2-4ac$, les solutions de $az^2+bz+c=0$ sont données par

$$z_0 = \frac{-b+w_0}{2a},\ z_1 = \frac{-b+w_1}{2a}.$$

En effet, pour $k = 0, 1$,

$$\begin{aligned} az_k^2 + bz_k + c =& a\frac{b^2-2bw_k+w_k^2}{4a^2} + b\frac{-b+w_k}{2a} + c \\ =& -\frac{b^2}{4a} + \frac{w_k^2}{4a} + c \\ =& -\frac{b^2}{4a} + \frac{b^2-4ac}{4a} + c = 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.29.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \neq 0$ et le polynôme de degré n à coefficients réels :

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n.$$

Alors, les racines de p sont soit réelles, soit des paires de nombres complexes conjugués.

Démonstration. Soit z_0 une racine de p, c'est-à-dire $p(z_0) = 0$. Montrons que $p(\overline{z_0}) = 0$ également.
On a, par les propriétés du conjugué (voir proposition 2.3, page 44)

$$\begin{aligned} 0 =& \overline{0} \\ =& \overline{p(z_0)} \\ =& \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} \\ =& \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} \\ =& \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z_0^k} \\ \overset{a_k\in\mathbb{R}}{=}& \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k \\ =& p(\overline{z_0}), \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

Corollaire 2.30 (Théorème fondamental de l'algèbre, cas réel)**.**
Tout polynôme à coefficients réels peut être factorisé sur $\mathbb{R}$ en produit de facteurs affines $(z-z_k)$ (avec $z_k \in \mathbb{R}$) et quadratiques irréductibles sur $\mathbb{R}$ (z^2+bz+c) (avec $b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2-4c<0$).

Démonstration. Écrivons

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

avec $a_k \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$.
Par le théorème fondamental de l'algèbre (voir théorème 2.25, page 60) on peut factoriser

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

Si $z_k \in \mathbb{R}$, on laisse le terme $z - z_k$ dans la factorisation.
Si $z_k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors, par la proposition 2.29, page 61, il doit y avoir une autre racine z_j telle que $\overline{z_j} = z_k$. En regroupant les deux termes correspondants dans la factorisation,

$$(z - z_k)(z - z_j) = (z - z_k)(z - \overline{z_k}) = z^2 - (z_k + \overline{z_k})z + |z_k|^2 = z^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_k)z + |z_k|^2.$$

De plus, on a alors

$$4\,\mathrm{Re}(z_k)^2 - 4|z_k|^2 = -4\,\mathrm{Im}(z_k)^2 < 0,$$

vu qu'on a supposé que $\mathrm{Im}(z_k) \neq 0$ en supposant que $z_k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
Donc le facteur $z^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_k)z + |z|^2$ est bien irréductible sur $\mathbb{R}$.
En faisant ceci avec toutes les racines z_k, on obtient bien le résultat. □

Exemple 2.31.
Soit $p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$. On peut factoriser ce polynôme (la méthode de la remarque 2.26 nous permet de deviner 1 comme racine) sur $\mathbb{C}$ en

$$p(z) = (z - 1)(z - 1 + i)(z - 1 - i)$$

On constate que les racines $1 + i$ et $1 - i$ sont conjuguées l'une de l'autre et donc, on les regroupe :

$$(z - 1 + i)(z - 1 - i) = z^2 - 2z + 2$$

qui est un polynôme de degré 2 réel et irréductible sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la factorisation sur $\mathbb{R}$ de notre polynôme est

$$p(z) = (z - 1)(z^2 - 2z + 2)$$

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 3.1 (suite)**.**
Une *suite* est la donnée d'une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sauf qu'on écrit x_n à la place de $f(n)$.
Pour désigner la suite en entier, on écrit $(x_n)_{n\geq 0}$ ou juste (x_n).
Des fois, on fait commencer la suite à $n_0 \geq 1$ auquel cas on écrit $(x_n)_{n\geq n_0}$.

Exemple 3.2. (*i*) La *suite harmonique* $(x_n)_{n\geq 1}$ est définie par $x_n = \frac{1}{n}$. On a

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = \frac{1}{4},\ ...$$

(*ii*) La *suite harmonique alternée* $(x_n)_{n\geq 1}$ est donnée par $x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. On a

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = -\frac{1}{4},\ ...$$

(*iii*) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = 14$. On a

$$x_0 = 14,\ x_1 = 14,\ x_2 = 14,\ ...$$

(*iv*) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = n^2$. On a

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 9,\ x_4 = 16, ...$$

(*v*) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par x_n est le $n$ème nombre premier. On a alors

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = 7,\ x_5 = 11,\ x_6 = 13,\ ...$$

Définition 3.3.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que

(*i*) (x_n) est *croissante* si pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} \geq x_n$.

(*ii*) (x_n) est *strictement croissante* si pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} > x_n$.

(*iii*) (x_n) est *décroissante* si pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} \leq x_n$.

(*iv*) (x_n) est *strictement décroissante* si pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} < x_n$.

(*v*) (x_n) est *(strictement) monotone* si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

(*vi*) (x_n) est *majorée* si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$, $x_n \leq c$

(vii) (x_n) est *minorée* si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$, $x_n \geq c$

(viii) (x_n) est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Remarque 3.4.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite.

(*i*) La suite (x_n) est minorée si et seulement si l'ensemble $\{x_n \ : \ n \geq 0\}$ est minoré.

(*ii*) La suite (x_n) est majorée si et seulement si l'ensemble $\{x_n \ : \ n \geq 0\}$ est majoré.

Notation 3.5 ($\sup(x_n)$, $\inf(x_n)$)**.**
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite.

(*i*) Si (x_n) est minorée on écrit $\inf(x_n) = \inf\{x_n \ : \ n \geq 0\}$.

(*ii*) Si (x_n) est majorée on écrit $\sup(x_n) = \sup\{x_n \ : \ n \geq 0\}$.

Proposition 3.6 (caractérisation des suites bornées)**.**
Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée si et seulement si

$$\boxed{\exists c \geq 0, \ \forall n \geq 0, \ |x_n| \leq c.}$$

Démonstration. Commençons par montrer que si (x_n) est bornée, alors, il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n| \leq c$.
Vu que (x_n) est minorée et majorée, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$,

$$m \leq x_n \leq M$$

Posons $c = \max\{|m|, |M|\}$. En utilisant le fait que le maximum d'un ensemble est toujours plus grand que n'importe quel élément de cet ensemble et le fait que la valeur absolue d'un nombre est toujours plus grande que ce nombre, on a

$$c \geq |m| = |-m| \geq -m.$$

En amplifiant par -1, on déduit

$$-c \leq m. \tag{3.6.1}$$

Par des arguments similaires à ci-dessus, on a

$$M \leq |M| \leq c. \tag{3.6.2}$$

On conclut que pour tout $n \geq 0$,

$$-c \overset{(3.6.1)}{\leq} m \leq x_n \leq M \overset{(3.6.2)}{\leq} c$$

qui est équivalent à

$$|x_n| \leq c.$$

Ceci termine la première partie de la preuve.
Supposons maintenant qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$,

$$|x_n| \leq c$$

et montrons que (x_n) est bornée, c'est-à-dire, montrons qu'elle est majorée et minorée. On a, pour tout $n \geq n_0$,

$$-c \leq x_n \leq c.$$

Ainsi, (x_n) est minorée par $-c$ et majorée par c.
Ceci termine la démonstration. □

Exemple 3.7. *(i)* Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$x_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}.$$

Montrons que la suite est bornée à l'aide de la caractérisation.
On a

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n|}{|1+\sqrt{n}|} = \frac{1}{|1+\sqrt{n}|} \leq 1.$$

Ainsi, prenant $c = 1$, on a bien

$$|x_n| \leq c$$

pour tout $n \geq 0$.
Remarquons qu'il est important que la constante c qu'on trouve ne dépende pas de n.

(ii) Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$x_n = (-1)^n n.$$

Montrons que (x_n) n'est pas bornée à l'aide de la caractérisation. C'est-à-dire, on doit montrer que pour tout $c > 0$, il existe $n \geq 0$ tel que $|x_n| > c$.
Soit donc $c > 0$ quelconque et $n = \lceil c \rceil + 1$. Alors,

$$|x_n| = |(-1)^n n| = n = \lceil c \rceil + 1 \geq c + 1 > c,$$

qui est le résultat voulu.

3.2 Limites de suites

Définition 3.8 (limite, suite convergente)**.** *(i)* Soit $(x_n)_{n\geq 0}$, une suite et $l \in \mathbb{R}$. On dit que l *est la limite de* (x_n) ou que (x_n) *converge vers* l si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |x_n - l| \leq \varepsilon}.$$

On note alors $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que (x_n) *converge* ou *est convergente* si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que (x_n) converge vers l, c'est-à-dire

$$\boxed{\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |x_n - l| \leq \varepsilon}.$$

Exemple 3.9. *(i)* Soit $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Soit $x_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil^2} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

(*iii*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_n = \alpha$ pour $n \geq 0$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $N = 0$. Alors, pour tout $n \geq N$

$$|x_n - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon.$$

qui est le résultat voulu.
Une telle suite est appelée une suite *constante* car la valeur de x_n ne dépend pas de n. Nous sommes ici face à un cas très rare : N ne dépend pas de ε.

(*iv*) Soit $0 < \alpha < 1$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ la *suite géométrique* définie par $x_n = \alpha^n$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. On distingue deux cas.
Cas 1 : $\varepsilon \geq 1$.
Dans ce cas, on pose $N = 0$ et on a, pour tout $n \geq N$,

$$|x_n| = \alpha^n \leq 1 \leq \varepsilon,$$

ce qui montre le résultat dans ce cas.
Cas 2 : $0 < \varepsilon < 1$.
Dans ce cas, on a $\log(\varepsilon) < 0$ et $\log(\alpha) < 0$. On pose $N = \left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)} \right\rceil$.
Alors, pour tout $n \geq N$,

$$|x_n| = \alpha^n = e^{n\log(\alpha)} \leq e^{N\log(\alpha)} \leq e^{\frac{\log(\varepsilon)}{\log(\alpha)}\log(\alpha)} = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

Proposition 3.10 (Unicité de la limite)**.**
Si une suite converge, la limite est unique.

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons que $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ sont deux limites d'une même suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et que $l_1 \neq l_2$. Soit $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$. Par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = l_2$, on a qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\text{pour tout } n \geq N_1,\ |x_n - l_1| \leq \varepsilon \tag{3.10.1}$$
$$\text{pour tout } n \geq N_2,\ |x_n - l_2| \leq \varepsilon. \tag{3.10.2}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, vu que le maximum d'un ensemble est toujours plus grand que n'importe quel élément de l'ensemble, on a $N \geq N_1$ et $N \geq N_2$. Ainsi,

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - x_N + x_N - l_2| \leq \underbrace{|l_1 - x_N|}_{\overset{(3.10.1)}{\leq} \varepsilon} + \underbrace{|x_N - l_2|}_{\overset{(3.10.2)}{\leq} \varepsilon} \leq 2\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

ce qui est absurde, et montre que nécessairement $l_1 = l_2$.

Proposition 3.11.
Une suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, $|x_n| \leq c$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque, fixé. Par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - l| \leq \varepsilon$.

Posons
$$c = \max\{|x_0|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, |l| + \varepsilon\} > 0,$$
et montrons que pour tout $n \geq 0$, $|x_n| \leq c$. Soit donc $n \geq 0$ quelconque. On distingue deux cas :
Cas 1 : $n \leq N - 1$.
Dans ce cas, on a
$$|x_n| \in \{|x_0|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, |l| + \varepsilon\}$$
et donc $|x_n| \leq c$ en vertu du fait que le maximum d'un ensemble est toujours plus grand que n'importe lequel des éléments de l'ensemble.
Cas 2 : $n \geq N$.
Dans ce cas, on a $|x_n - l| \leq \varepsilon$. Donc,
$$|x_n| = |x_n - l + l| \leq |x_n - l| + |l| \leq |l| + \varepsilon \leq c$$
où à nouveau la dernière inégalité vient du fait que
$$|l| + \varepsilon \in \{|x_0|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, |l| + \varepsilon\}$$
et que le maximum d'un ensemble est toujours plus grand que n'importe quel élément de cet ensemble. □

Définition 3.12 (suite divergente)**.**
Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit que (x_n) *diverge* ou *est divergente* si (x_n) n'est pas convergente,c'est-à-dire,
$$\boxed{\forall l \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \text{ tel que } |x_n - l| > \varepsilon}$$

Exemple 3.13.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = (-1)^n$. Alors, (x_n) est divergente. On montre ceci par l'absurde.
Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. Par définition, si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
$$|x_n - l| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}.$$
Remarquons que
$$|x_N - x_{N+1}| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N||1 - (-1)| = 2.$$
Vu que $N, N + 1 \geq N$, on conclut
$$2 = |x_N - x_{N+1}| = |x_N - l + l - x_{N+1}| \leq \underbrace{|x_N - l|}_{\leq\frac{1}{2}} + \underbrace{|l - x_{N+1}|}_{\leq\frac{1}{2}} \leq 1$$
ce qui est absurde.
Ceci montre donc bien que (x_n) est divergente.

Définition 3.14.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite. On dit que

(i) (x_n) *tend vers l'infini* si
$$\boxed{\forall M \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ x_n \geq M}.$$
On note alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(*ii*) (x_n) *tend vers moins l'infini* si

$$\boxed{\forall M \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ x_n \leq -M}.$$

On note alors $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Remarque 3.15.
Une suite qui tend vers l'infini ou moins l'infini n'est pas bornée et donc diverge (proposition 3.11, page 66).

Exemple 3.16. (*i*) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = n$. Alors (x_n) tend vers l'infini. En effet, si $M \geq 0$, on pose $N = \lceil M \rceil$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$x_n = n \geq N = \lceil M \rceil \geq M.$$

(*ii*) Soit $\alpha > 1$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique définie par $x_n = \alpha^n$. Alors, (x_n) tend vers l'infini. En effet, si $M \geq 0$, on pose $N = \left\lceil \frac{\log(M+1)}{\log(\alpha)} \right\rceil$. Alors

$$x_n = \alpha^n \geq \alpha^N \geq \alpha^{\frac{\log(M+1)}{\log(\alpha)}} = M + 1 \geq M,$$

qui est le résultat voulu.

(*iii*) Soit plus généralement $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante qui n'est pas majorée. Alors, (x_n) tend vers l'infini. En effet, soit $M \geq 0$ quelconque. Vu que (x_n) n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_N \geq M.$$

De plus, par croissance de (x_n), on a pour tout $n \geq N$,

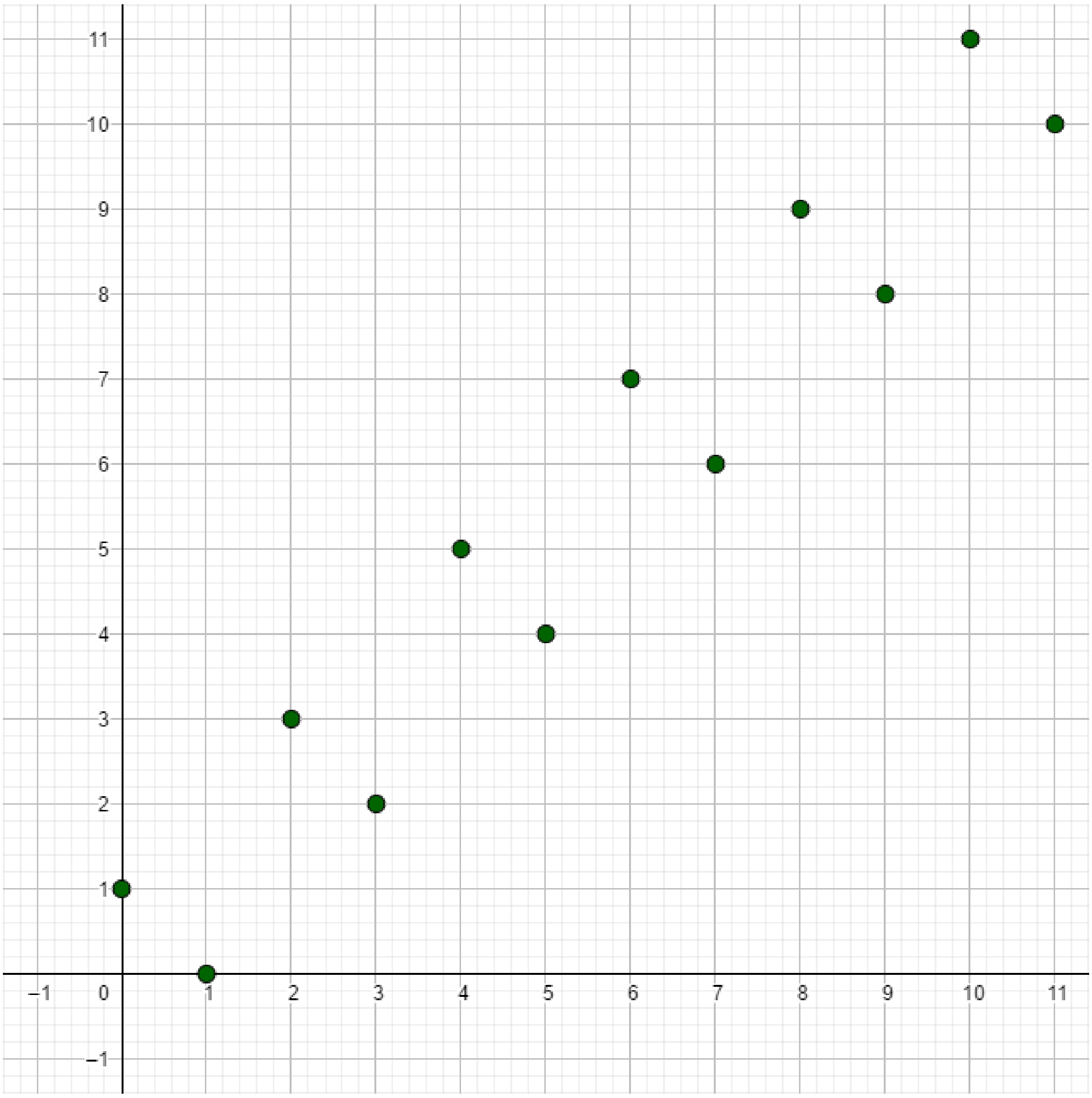
$$x_n \geq x_N \geq M.$$

(*iv*) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = -n^2$. Alors (x_n) tend vers moins l'infini. En effet, si $M \geq 0$, on pose $N = \left\lceil \sqrt{M} \right\rceil$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$x_n = -n^2 \leq -N^2 = -\left\lceil \sqrt{M} \right\rceil^2 \leq -M.$$

(*v*) Plus généralement si une suite est décroissante et non-minorée, elle tend vers $-\infty$

(*vi*) Attention cependant, pas toutes les suites qui tendent vers ∞ ou $-\infty$ sont monotones. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = n + (-1)^n$.



Alors, si n est pair, on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= n+1+(-1)^{n+1} = n+1-1 = n \\ x_n &= n+(-1)^n = n+1, \end{aligned}$$

d'où $x_{n+1} < x_n$. Et, si n est impair,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= n+1+(-1)^{n+1} = n+1+1 = n+2 \\ x_n &= n+(-1)^n = n-1, \end{aligned}$$

d'où $x_{n+1} > x_n$. Ainsi, (x_n) n'est pas monotone.
De plus, si $M \geq 0$ est quelconque, alors, posant $N = \lceil M \rceil + 1$, on a pour tout $n \geq N$,

$$x_n = n + (-1)^n \geq n - 1 \geq N - 1 = \lceil M \rceil + 1 - 1 \geq M,$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Proposition 3.17.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ *deux suites et* $a, b \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. *Alors,*

(i) la suite $z_n = x_n + y_n$ *converge vers* $a + b$.

(ii) la suite $z_n = x_n y_n$ *converge vers* ab.

(iii) si $b \neq 0$, *la suite* $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ *converge vers* $\frac{a}{b}$.

(iv) si il existe $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$, $x_n \leq y_n$, *alors* $a \leq b$.

Démonstration. (i) On doit montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |z_n - (a+b)| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, on a qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N_1,\ |x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N_2,\ |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc,

$$|z_n - (a+b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq \underbrace{|x_n - a|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_n - b|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) On doit montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |z_n - ab| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque.
Par la proposition 3.11, page 66, vu que (x_n) est convergente, elle est bornée. Il existe donc $c > 0$ tel que

$$\forall n \geq 0,\ |x_n| \leq c.$$

Par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, on a qu'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N_1,\ |x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{c + |b|} \qquad \forall n \geq N_2,\ |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{c + |b|}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc,

$$\begin{aligned} |z_n - ab| &= |x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= \underbrace{|x_n|}_{\leq c} \underbrace{|y_n - b|}_{\leq \frac{\varepsilon}{c+|b|}} + |b| \underbrace{|x_n - a|}_{\leq \frac{\varepsilon}{c+|b|}} \leq c \frac{\varepsilon}{c + |b|} + |b| \frac{\varepsilon}{c + |b|} = \varepsilon, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(iii) On commence par montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b},$$

c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |y_n - b| \leq \frac{|b|^2\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N_2,\ |y_n - b| \leq \frac{|b|}{2}.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc,

$$|y_n| = |y_n - b + b| \geq |b| \underbrace{- \underbrace{|y_n - b|}_{\leq \frac{|b|}{2}}}_{\geq -\frac{|b|}{2}} \geq \frac{|b|}{2}. \tag{3.17.1}$$

Pour finir, pour tout $n \geq N$, on a

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} = \underbrace{|y_n - b|}_{\leq \frac{|b|^2\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|y_n|}}_{\overset{(3.17.1)}{\leq} \frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \leq \frac{|b|^2\varepsilon}{2}\frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|} = \varepsilon.$$

Ceci termine la démonstration de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}.$$

Pour finir, par le point précédent, on a

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n \frac{1}{y_n} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b},$$

qui est le résultat voulu.

(iv) On montre le résultat par l'absurde. Supposons que $b < a$ et posons $\varepsilon = \frac{a-b}{4} > 0$. Alors, il existe N_1, N_2 tel que

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } n \geq N_1,\ |x_n - a| \leq \varepsilon \\ &\text{pour tout } n \geq N_2,\ |y_n - b| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } n \geq N_1,\ a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon \\ &\text{pour tout } n \geq N_2,\ b - \varepsilon \leq y_n \leq b + \varepsilon. \end{aligned}$$

En prenant la différence entre ces deux égalités, on a pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$,

$$b - a - 2\varepsilon \leq y_n - x_n \leq b - a + 2\varepsilon = b - a + \frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2} < 0,$$

ce qui implique que pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, $y_n < x_n$ ce qui est une contradiction.

Exemple 3.18. (i) Déterminons la limite de $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. On a vu à l'exemple 3.9, page 65 que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0.$$

Remarquons qu'on peut aussi redémontrer que $\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$ à l'aide de la proposition et du fait que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. En effet, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

(*ii*) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Définissons deux suites constantes $\alpha_n = \alpha$ et $\beta_n = \beta$ pour tout n. On a vu dans l'exemple 3.9, page 65 que $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta$. Alors, par la proposition, on a

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n x_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(\beta y_n) = \lim_{n\to\infty}(\beta_n y_n) = \lim_{n\to\infty}\beta_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = \beta \lim_{n\to\infty} y_n.$$

À nouveau, par la proposition, on déduit

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) + \lim_{n\to\infty}(\beta y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n,$$

qui est le résultat voulu.

(*iii*) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = \frac{3n+4}{2n^2+4n+2}.$$

Alors, on a

$$x_n = \frac{n^2}{n^2}\frac{\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}{2+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}} = \frac{0+0}{2+0+0} = 0.$$

(*iv*) Soit $x_n = (-1)^n$ et $y_n = (-1)^{n+1}$. Si on pose $z_n = x_n + y_n$, on a

$$z_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n - (-1)^n = 0,$$

qui converge vers 0. Néanmoins, ici, ni (x_n) ni (y_n) ne converge, comme on l'a vu dans l'exemple 3.13, page 67. Ainsi, on voit que l'hypothèse (x_n) converge et (y_n) converge est importante pour pouvoir écrire

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Remarque 3.19. (*i*) En réalité pour avoir le droit d'écrire

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

il suffit que parmis les 3 suites (x_n), (y_n) et $(x_n + y_n)$, 2 convergent. La proposition nous permet alors de conclure que la 3ème converge et l'équation ci-dessus est alors vraie.

En effet, si (x_n) et (y_n) converge, la proposition nous permet de conclure. Si par exemple, (x_n) et $(x_n + y_n)$ convergent, alors,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n,$$

qui est le résultat voulu.

Le cas où (y_n) et $(x_n + y_n)$ convergent se traite de la même manière.

(*ii*) Le résultat de la dernière partie de la proposition est faux si on remplace toutes les inégalités par des inégalités strictes. En effet, si par exemple $a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$, on a $a_n < b_n$ pour tout n, mais, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

3.3 Critères de convergence pour les suites

Théorème 3.20 (Critère des deux gendarmes)**.**
Soient $(x_n)_{n\geq 0}$*,* $(y_n)_{n\geq 0}$ *et* $(z_n)_{n\geq 0}$ *trois suites telles que*

(i) (x_n) *et* (z_n) *convergent vers la même limite* l*.*

(ii) il existe $k \in \mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \geq k$*,* $x_n \leq y_n \leq z_n$*.*

Alors, (y_n) *converge vers* l*.*

Démonstration. On doit montrer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |y_n - l| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ et $\lim_{n\to\infty} z_n = l$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |x_n - l| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq N_2,\ |z_n - l| \leq \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall n \geq N_1,\ -\varepsilon \leq x_n - l \qquad \forall n \geq N_2,\ z_n - l \leq \varepsilon.$$

Posons maintenant $N = \max\{N_1, N_2, k\}$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$-\varepsilon \overset{n\geq N_1}{\leq} x_n - l \overset{n\geq k}{\leq} y_n - l \overset{n\geq k}{\leq} z_n - l \overset{n\geq N_2}{\leq} \varepsilon,$$

ce qui implique que pour tout $n \geq N$,

$$|y_n - l| \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu. □

Corollaire 3.21.
Soit $l \in \mathbb{R}$*,* $(y_n)_{n\geq 0}$ *une suite et* $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite de nombres positifs telles que*

(i) (a_n) *converge vers* 0*.*

(ii) il existe $k \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq k$*,* $|y_n - l| \leq a_n$*.*

Alors, $\lim_{n\to\infty} y_n = l$

Démonstration. Posons $x_n = l - a_n$, $z_n = l + a_n$. Alors, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ et $\lim_{n\to\infty} z_n = l$. De plus,pour tout $n \geq k$,

$$-a_n \leq y_n - l \leq a_n,$$

et donc, en ajoutant l à ces inégalités, on a

$$x_n = l - a_n \leq y_n \leq l + a_n = z_n.$$

Ainsi, par le critère des deux gendarmes (théorème 3.20, page 73), on a

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l,$$

qui est le résultat voulu. □

Théorème 3.22 (suites monotones bornées)**.**
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite. Si* (x_n) *est croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée), elle converge vers* $\sup(x_n)$ *(respectivement* $\inf(x_n)$*).*

Démonstration. Commençons par faire la démonstration pour les suites croissantes et majorées. Soit donc $l = \sup(x_n)$. On doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation du suprémum (théorème 1.11, page 36), il existe $x \in \{x_n \ :\ n \geq 0\}$ tel que

$$x \geq l - \varepsilon.$$

Par définition de l'ensemble $\{x_n \ :\ n \geq 0\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_N$. C'est-à-dire,

$$x_N \geq l - \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geq N$, on a par croissance de (x_n) que

$$-\varepsilon \leq x_N - l \leq x_n - l$$

De plus, vu que l est un majorant de $\{x_n \ :\ n \geq 0\}$, on a $x_n \leq l$. En reprenant les inégalités ci-dessus, on a

$$-\varepsilon \leq x_n - l \leq 0 \leq \varepsilon.$$

Ceci étant équivalent à

$$|x_n - l| \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

Passons à la démonstration pour les suites décroissantes minorées. Soit donc $l = \inf(x_n)$. On doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N,\ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de l'infimum (théorème 1.11, page 36), il existe $x \in \{x_n \ :\ n \geq 0\}$ tel que

$$x \leq l + \varepsilon.$$

Par définition de l'ensemble $\{x_n \ :\ n \geq 0\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_N$. C'est-à-dire,

$$x_N \leq l + \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geq N$, on a par décroissance de (x_n) que

$$x_n - l \leq x_N - l \leq \varepsilon.$$

De plus, vu que l est un mainorant de $\{x_n \ :\ n \geq 0\}$, on a $x_n \geq l$. En reprenant les inégalités ci-dessus, on a

$$-\varepsilon \leq 0 \leq x_n - l \leq \varepsilon.$$

Ceci étant équivalent à

$$|x_n - l| \leq \varepsilon,$$

on a le résultat voulu.

Théorème 3.23 (Critère de d'Alembert pour les suites).
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et telle que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l$$

existe. Alors,

(i) si $l < 1$, (x_n) converge vers 0.

(ii) si $l > 1$, (x_n) diverge.

(iii) si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Démonstration. (*i*) On sépare la démonstration en plusieurs étapes.

Étape 1 : On montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$,

$$|x_{n+1}| \leq \left(\frac{l+1}{2}\right) |x_n|.$$

Soit $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$. Par définition, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$,

$$\left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} - l\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq k$,

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}| &= \left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right| |x_n| \\
&\leq \left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} - l\right| |x_n| + l|x_n| \\
&\leq \varepsilon |x_n| + l|x_n| \\
&= \left(\frac{1-l}{2} + l\right) |x_n| \\
&= \left(\frac{l+1}{2}\right) |x_n|,
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de cette étape.

Étape 2 : On montre par récurrence que pour tout $n \geq k$,

$$|x_n| \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-k} |x_k|. \tag{3.23.1}$$

Ancrage : Le résultat est vrai pour $n = k$ car l'inégalité se réduit à $|x_k| \leq |x_k|$ qui est vrai.

Pas de récurrence : Supposons que le résultat est vrai pour n et montrons le vrai pour $n+1$. On a

$$|x_{n+1}| \overset{\text{Étape 1}}{\leq} \left(\frac{l+1}{2}\right) |x_n| \overset{\text{H.R.}}{\leq} \left(\frac{l+1}{2}\right) \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-k} |x_k| = \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n+1-k} |x_k|,$$

qui est le résultat voulu.

Étape 3 : On conclut à l'aide du corollaire du critère des deux gendarmes (voir corollaire 3.21, page 73).

Remarquons que $0 < \frac{l+1}{2} < 1$. Donc, par l'exemple 3.9, page 65,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^n = 0.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-k} |x_k| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \frac{|x_k|}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^k} = 0 \cdot \frac{|x_k|}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^k} = 0$$

Par le corollaire du critère des deux gendarmes, on a donc que (x_n) converge vers 0.

(ii) On montre dans ce cas que la suite n'est pas bornée, c'est-à-dire, en vertu de la proposition 3.6, page 64, on montre que pour tout $c > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_n| > c.$$

La proposition 3.11, page 64 nous permet alors de conclure que la suite ne converge pas.
On sépare la démonstration en 3 étapes.
Étape 1 : On montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$,

$$|x_{n+1}| \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)|x_n|.$$

Soit $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$. Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq k$,

$$\left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} - l\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq k$,

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}| &= \left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right||x_n| \\
&\geq \left|\left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} - l\right||x_n| - l|x_n|\right| \\
&\geq l|x_n| - \left|\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} - l\right||x_n| \\
&\geq l|x_n| - \varepsilon|x_n| \\
&= \left(l - \frac{l-1}{2}\right)|x_n| \\
&= \left(\frac{l+1}{2}\right)|x_n|,
\end{aligned}$$

ce qui termine cette étape.
Étape 2 : On montre par récurrence que pour tout $n \geq k$,

$$|x_n| \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-k}|x_k|. \tag{3.23.2}$$

Ancrage : Le résultat est vrai pour $n = k$ car l'inégalité se réduit à $|x_k| \geq |x_k|$ qui est vrai.
Pas de récurrence : Supposons que le résultat est vrai pour n et montrons le vrai pour $n+1$. On a

$$|x_{n+1}| \overset{\text{Étape 1}}{\geq} \left(\frac{1+1}{2}\right)|x_n| \overset{\text{H.R.}}{\geq} \left(\frac{1+1}{2}\right)\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-k}|x_k| = \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n+1-k}|x_k|,$$

qui est le résultat voulu.
Étape 3 : On conclut.
Soit $c > 0$ quelconque. Considérons n tel que $n \geq k$ et

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{c+1}{|x_k|}\right)}{\log\left(\frac{l+1}{2}\right)} + k.$$

Alors,

$$|x_n| \overset{\text{Étape 2}}{\geq} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-k} |x_k| \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{\frac{\log\left(\frac{c+1}{|x_k|}\right)}{\log\left(\frac{l+1}{2}\right)}} |x_k| = \frac{c+1}{|x_k|}|x_k| = c+1 > c.$$

Comme dit au début de la preuve, ceci montre que (x_n) n'est pas bornée et donc (x_n) ne converge pas.

□

Théorème 3.24.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite. Alors, elle converge si et seulement si elle est* de Cauchy*, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n, m \geq N,\ |x_n - x_m| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Commençons par supposer que (x_n) converge et montrons que (x_n) est de Cauchy. Posons $l = \lim_{n\to\infty} x_n$ et soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n, m \geq N$,

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - l| + |x_m - l| \leq \varepsilon$$

qui montre que (x_n) est de Cauchy et termine cette partie de la démonstration.
Supposons maintenant que (x_n) est de Cauchy et montrons qu'elle converge. Attention, cette partie de la démonstration utilise des concepts et des résultats qui seront présentés plus tard dans la section 3.4.
On sépare la démonstration en plusieurs étapes.
Étape 1 : On montre que (x_n) est bornée.
Fixons $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$,

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon.$$

Posons

$$c = \max\{|x_0|, |x_1|, ..., |x_{N-1}|, |x_N| + \varepsilon\} > 0$$

et montrons que pour tout $n \geq 0$,

$$|x_n| \leq c.$$

On distingue deux cas.
Cas 1 : $n \leq N - 1$.
Dans ce cas, on a

$$|x_n| \in \{|x_0|, |x_1|, ..., |x_{N-1}|, |x_N| + \varepsilon\},$$

donc

$$|x_n| \leq c.$$

Cas 2 : $n \geq N$.
Dans ce cas, on a

$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| \leq |x_N| + \varepsilon \leq c$$

où, à nouveau la dernière inégalité vient du fait que

$$|x_N| + \varepsilon \in \{|x_0|, |x_1|, ..., |x_{N-1}|, |x_N| + \varepsilon\}$$

Étape 2 : On trouve la limite de la suite.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 3.33, page 86) il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0} \subset (x_n)$ qui converge. Soit donc l sa limite.
Étape 3 : On montre que la suite en entier converge vers l.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, par hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N_1$,

$$|x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par l'étape 2, il existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K_1$,

$$|x_{n_k} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, vu que $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, (voir remarque 3.31, page 86) il existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K_2$

$$n_k \geq N_1.$$

Posons $K = \max\{K_1, K_2\}$ et $N = n_K$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_K}| + |x_{n_K} - l| \leq \varepsilon.$$

En effet, $n_K \geq N_1$ et $K \geq K_1$.
Ceci termine la démonstration. $\square$.

Exemple 3.25. (i) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

On veut montrer que (x_n) converge en montrant qu'elle est croissante et majorée. On a

$$\begin{aligned} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^k} \frac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{j=1}^{n-k} j} = \frac{1}{n^k} \prod_{j=n+1-k}^{n} j$$

En posant $i = n - j$, on a

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} &= \frac{1}{n^k} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \prod_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left(1 - \frac{i}{n}\right)}_{\leq 1 - \frac{i}{n+1}} \leq \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n+1-i}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^k} \prod_{i=0}^{k-1} (n+1-i). \end{aligned}$$

En posant $j = n + 1 - i$, on obtient

$$\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{(n+1)^k} \prod_{j=n+2-k}^{n+1} j = \frac{1}{(n+1)^k} \frac{\prod_{j=1}^{n+1} j}{\prod_{j=1}^{n+1-k} j} = \frac{1}{(n+1)^k} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}.$$

Utilisant cette inégalité, on déduit

$$\begin{aligned}x_n \leq& 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}\frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}\\ \leq& \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1},\end{aligned}$$

ce qui montre que (x_n) est croissante.
Montrons maintenant que la suite est majorée. On réutilise des calculs précédents pour écrire

$$x_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\underbrace{\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)}_{\leq 1} \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Remarquons que pour tout $k \geq 2$,

$$k! = 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k \geq 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 = 2^{k-1}.$$

Ainsi,

$$x_n \leq 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}.$$

En utilisant que

$$\sum_{k=j}^{n} a^k = \frac{a^j - a^{n+1}}{1-a},$$

on déduit

$$x_n \leq 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2+1-\frac{1}{2^{n-1}} \leq 3.$$

Ainsi, (x_n) converge.
La limite de (x_n) est la constante d'euler qu'on note e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828...$$

Plus généralement, on peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) (x_n) diverge

(b) (x_n) n'est pas majorée

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

En effet, (a) implique (b) cas il s'agit de la contraposée du théorème 3.22. De plus, (b) implique (c) par l'exemple 3.16, page 68. Pour finir, on a vu que (c) implique (a) dans la remarque 3.15, page 68.
Similairement, si (x_n) est décroissante à la place de croissante, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) (x_n) diverge

(b) (x_n) n'est pas minorée

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(*iii*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = \frac{\alpha^n}{n!}$. Montrons que (x_n) converge vers 0. On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|\alpha|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha|}{n+1} = 0$$

Ainsi, par le critère de d'Alembert, (x_n) converge vers 0. $\square$

3.4 limsup, liminf et sous-suites

Proposition 3.26.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite bornée. Alors, les suites*

$$\begin{aligned} a_n &= \inf\{x_m \ : \ m \geq n\} \\ b_n &= \sup\{x_m \ : \ m \geq n\} \end{aligned}$$

convergent.

Démonstration. Le but de la preuve est de montrer que (a_n) est croissante et majorée tandis que (b_n) est décroissante et minorée.
Remarquons que pour tout $n \geq 0$

$$\{x_m \ : \ m \geq n+1\} \subset \{x_m \ : \ m \geq n\}.$$

Ainsi, par la proposition 1.13, page 38, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \inf\{x_m \ : \ m \geq n+1\} \geq \inf\{x_m \ : \ m \geq n\} = a_n \\ b_{n+1} &= \sup\{x_m \ : \ m \geq n+1\} \leq \sup\{x_m \ : \ m \geq n\} = b_n. \end{aligned}$$

Ceci montre que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
De plus, vu que (x_n) est bornée, il existe $c, C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 0$

$$c \leq x_n \leq C.$$

Ainsi, pour tout n, c est un minorant de $\{x_n \ : \ n \geq m\}$ et C est un majorant du même ensemble. En particulier, vu que le suprémum est le plus petit majorant et que l'infimum est le plus grand minorant, on a

$$c \leq a_n \leq b_n \leq C.$$

On a donc montré que (a_n) et (b_n) sont bornées. Par le théorème 3.22, page 73, (a_n) et (b_n) convergent, ce qui est le résultat voulu.

Définition 3.27 ($\liminf$, $\limsup$)**.**
Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite bornée.

(*i*) la *liminf* de (x_n), notée $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ est définie par

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_m \ : \ m \geq n\}.$$

(*ii*) la *limsup* de (x_n), notée $\limsup_{n\to\infty} x_n$ est définie par

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_m \ : \ m \geq n\}.$$

Exemple 3.28. (*i*) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = (-1)^n$.
Alors,

$$\begin{aligned} a_n &= \inf\{(-1)^m \ : \ m \geq n\} = \inf\{-1, 1\} = -1 \\ b_n &= \sup\{(-1)^m \ : \ m \geq n\} = \sup\{-1, 1\} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} a_n = -1 \\ \limsup_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \end{aligned}$$

(*ii*) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$.
Alors,

$$\begin{aligned} a_n &= \inf\left\{\frac{1}{m} \ : \ m \geq n\right\} = 0 \\ b_n &= \sup\left\{\frac{1}{m} \ : \ m \geq n\right\} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \limsup_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \end{aligned}$$

Proposition 3.29.
Soient $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites bornées. Alors,

(i) $\liminf_{n\to\infty} -x_n = -\limsup_{n\to\infty} x_n$ *et* $\limsup_{n\to\infty} -x_n = -\liminf_{n\to\infty} x_n$.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

(iii) (x_n) *converge si et seulement si*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

De plus on a alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

(iv) On a

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) &\geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \\ \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) &\leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

(v) Si (x_n) converge,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \\ \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

Démonstration. (i) Soient

$$\begin{aligned} a_n &= \inf\{-x_m \ : \ m \geq n\} \\ b_n &= -\sup\{x_m \ : \ m \geq n\}. \end{aligned}$$

Montrons que $a_n = b_n$. On peut faire ceci en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall m \geq n, \ b_n \leq -x_m \tag{3.29.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m \geq n \text{ tel que } b_n + \varepsilon \geq -x_m. \tag{3.29.2}$$

En effet, ces deux choses impliquent que $b_n = \inf\{-x_m \ : \ m \geq n\} = a_n$ (voir théorème 1.11, page 36).
Or, $-b_n = \sup\{x_m \ : \ m \geq n\}$. Donc, pour tout $m \geq n$, $x_m \leq -b_n$ ce qui est équivalent à (3.29.1). De plus, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m \geq n \text{ tel que } -b_n - \varepsilon \leq x_m$$

ce qui est équivalent à (3.29.2).
Ainsi, on a bien $a_n = b_n$ pour tout n et donc,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} -x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} -\sup\{x_m \ : \ m \geq n\} \\ &= -\lim_{n\to\infty} \sup\{x_m \ : \ m \geq n\} = -\limsup_{n\to\infty} x_n, \end{aligned}$$

ce qui montre un premier résultat. Pour montrer l'autre, on a

$$-\liminf_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty} -(-x_n) = \limsup_{n\to\infty} -x_n,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Soient

$$\begin{aligned} a_n &= \inf\{x_m \ : \ m \geq n\} \\ b_n &= \sup\{x_m \ : \ m \geq n\}. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $n \geq 0$, vu que $x_n \in \{x_m \ : \ m \geq n\}$, on a

$$a_n \leq x_n \leq b_n. \tag{3.29.3}$$

En particulier, $a_n \leq b_n$ et donc, en prenant la limite, on a

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

qui est le résultat.

(iii) Soient à nouveau

$$\begin{aligned} a_n &= \inf\{x_m \ : \ m \geq n\} \\ b_n &= \sup\{x_m \ : \ m \geq n\}. \end{aligned}$$

Commençons par supposer que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Vu que par (*ii*), on a aussi que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

On déduit que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ainsi, par (3.29.3) et le critère des deux gendarmes (voir théorème 3.20, page 73) on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

qui est le résultat voulu.

Supposons maintenant que (x_n) converge. Notons $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. Montrons que

$$l = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$-\varepsilon \leq x_n - l \leq \varepsilon,$$

ce qu'on peut écrire

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$$

Ainsi, si $m \geq n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon \leq x_m \leq l + \varepsilon.$$

En utilisant que a_n est le plus grand minorant de $\{x_m \ : \ m \geq n\}$, on déduit que pour tout $n \geq N$,

$$l - \varepsilon \leq \inf\{x_m \ : \ m \geq n\} = a_n \leq x_n \leq l + \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \geq N$,

$$-\varepsilon \leq a_n - l \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$|a_n - l| \leq \varepsilon,$$

et qui montre que

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Montrons maintenant que

$$l = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$-\varepsilon \leq x_n - l \leq \varepsilon,$$

ce qu'on peut écrire

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$$

Ainsi, si $m \geq n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon \leq x_m \leq l + \varepsilon.$$

En utilisant que b_n est le plus petit majorant de $\{x_m \ : \ m \geq n\}$, on déduit que pour tout $n \geq N$,

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq b_n = \sup\{x_m \ : \ m \geq n\} \leq l + \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \geq N$,

$$-\varepsilon \leq b_n - l \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$|b_n - l| \leq \varepsilon,$$

et qui montre que

$$l = \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

On conclut donc que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = l = \liminf_{n\to\infty} x_n,$$

qui est le résultat voulu.

(iv) On commence par montrer que $\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$. Soient

$$\begin{aligned} A_n &= \inf\{x_m + y_m \ : \ m \geq n\} \\ a_n &= \inf\{x_m \ : \ m \geq n\} \\ c_n &= \inf\{y_m \ : \ m \geq n\}. \end{aligned}$$

Montrons que $A_n \geq a_n + c_n$. À cette fin, on montre que $a_n + c_n$ est un minorant de $\{x_m + y_m \ : \ m \geq n\}$.
Or, pour tout $m \geq n$, on a $x_m \geq a_n$ et $y_m \geq c_n$ et donc

$$x_m + y_m \geq a_n + c_n,$$

ce qui montre que $a_n + c_n$ est un minorant de $\{x_m + y_m \ : \ m \geq n\}$. Du fait que A_n est le plus grand minorant, on déduit

$$A_n \geq a_n + c_n.$$

En passant à la limite,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \geq \lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} c_n \\ = \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n, \end{aligned}$$

qui est un des résultats voulus.
Passons à la démonstration de $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$. Soient

$$\begin{aligned} B_n &= \sup\{x_m + y_m \ : \ m \geq n\} \\ b_n &= \sup\{x_m \ : \ m \geq n\} \\ d_n &= \sup\{y_m \ : \ m \geq n\}. \end{aligned}$$

Montrons que $B_n \leq b_n + d_n$. À cette fin, on montre que $b_n + d_n$ est un majorant de $\{x_m + y_m \ : \ m \geq n\}$.

Or, pour tout $m \geq n$, on a $x_m \leq b_n$ et $y_m \leq d_n$ et donc

$$x_m + y_m \leq b_n + d_n,$$

ce qui montre que $b_n + d_n$ est un majorant de $\{x_m + y_m \ : \ m \geq n\}$. Du fait que B_n est le plus petit majorant, on déduit

$$B_n \leq b_n + d_n.$$

En passant à la limite,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} B_n \leq \lim_{n\to\infty}(b_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} d_n \\ &= \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n,\end{aligned}$$

qui finit la démonstration de cette partie.

(v) On commence par montrer que $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$. Par des points précédents, on a

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

De plus, par le même point,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} y_n &= \liminf_{n\to\infty}(y_n + x_n - x_n) \geq \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) + \liminf_{n\to\infty}(-x_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on a

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

Vu qu'on a les deux inégalités, on a le résultat.
Passons à la démonstration de $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$. On a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= -\liminf_{n\to\infty}(-x_n - y_n) = -\left(\lim_{n\to\infty} -x_n + \liminf_{n\to\infty} -y_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

Définition 3.30 (Sous-suite, point d'accumulation)**.**
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite.

(i) une *sous-suite* de (x_n) est la donnée d'une suite d'indices $(n_k)_{k\geq 0}$ tel que $n_k \in \mathbb{N}$ et $n_{k+1} > n_k$. La sous-suite est $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ et on note $(x_{n_k}) \subset (x_n)$.
Des fois, on fait commencer la sous-suite à $k_0 \geq 1$ auquel cas, on écrit $(x_{n_k})_{k\geq k_0} \subset (x_n)$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ est un *point d'accumulation* de (x_n) si il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0} \subset (x_n)$ qui converge vers λ.

Remarque 3.31.
La suite d'indices $(n_k)_{k\geq 0}$ est toujours une suite d'entiers strictement monotone et vérifie

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty.$$

En effet, on peut montrer par récurrence que pour tout $k \geq 0$,

$$n_k \geq k. \tag{3.31.1}$$

Exemple 3.32.
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = (-1)^n$. On a déjà vu que cette suite diverge. Considérons $n_k = 2k$ pour $k \geq 1$. On a bien que $n_k \in \mathbb{N}$ et $n_{k+1} = 2(k+1) = 2k+2 > 2k$. Ainsi, $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ définit bien une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$. Cette sous-suite est donnée par

$$x_{n_k} = x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

qui est une suite constante et qui converge vers 1. Ainsi, 1 est un point d'accumulation de (x_n).
On peut faire la même chose avec $n_k = 2k+1$ pour $k \geq 0$ et on obtient alors comme sous-suite

$$x_{n_k} = x_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1,$$

qui est aussi une suite constante qui converge vers -1 d'où -1 est également un point d'accumulation de la suite.

Théorème 3.33 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. On montre que qu'il existe $(x_{n_k})_{k\geq 1} \subset (x_n)_{n\geq 0}$ une sous suite qui converge vers $\limsup_{n\to\infty} x_n$.
Soit donc $l = \limsup_{n\to\infty} x_n$ et $b_n = \sup\{x_m \ : \ m \geq n\}$. On sépare la démonstration en plusieurs étapes.
Étape 1 : On montre qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_{n_1} - l| \leq 1.$$

On a vu (voir proposition 3.26, page 80) que $\lim_{n\to\infty} b_n = l$. Ainsi, par définition de la limite il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \ |b_n - l| \leq \frac{1}{2}.$$

De plus, par la caractérisation du suprémum (voir théorème 1.11, page 36) dans la définition de b_{N_1}, il existe $n_1 \geq N_1$ tel que

$$b_{N_1} - \frac{1}{2} \leq x_{n_1} \leq b_{N_1} \leq b_{N_1} + \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $|x_{n_1} - b_{N_1}| \leq \frac{1}{2}$ et donc

$$|x_{n_1} - l| \leq |x_{n_1} - b_{N_1}| + |b_{N_1} - l| \leq 1.$$

Étape 2 : On montre par récurrence qu'il existe $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres naturels tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{cases} n_{k+1} > n_k \\ |x_{n_k} - l| \leq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

L'étape 1 nous donne n_1. Supposons donc que $n_1, ..., n_k$ sont définis et construisons n_{k+1}. On a, par définition de la limite $\lim_{n\to\infty} b_n = l$ qu'il existe N_{k+1} tel que

$$\forall n \geq N_{k+1},\ |b_n - l| \leq \frac{1}{2(k+1)}.$$

Soit $M_{k+1} = \max\{n_k + 1, N_{k+1}\}$. Alors, par la caractérisation du suprémum (voir théorème 1.11, page 36) dans $b_{M_{k+1}}$ avec $1/(2(k+1))$ qui joue le rôle de ε, il existe $n_{k+1} \geq M_{k+1}$ tel que

$$b_{M_{k+1}} - \frac{1}{2(k+1)} \leq x_{n_{k+1}} \leq b_{M_{k+1}} \leq b_{M_{k+1}} + \frac{1}{2(k+1)}.$$

Ainsi, $|x_{n_{k+1}} - b_{M_{k+1}}| \leq \frac{1}{2(k+1)}$. Donc, vu que $n_{k+1} \geq M_{k+1} \geq N_{k+1}$, on a

$$|x_{n_{k+1}} - l| \leq |x_{n_{k+1}} - b_{M_{k+1}}| + |b_{M_{k+1}} - l| \leq \frac{1}{k+1}.$$

Remarquons de plus que $n_{k+1} \geq M_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ et donc, n_{k+1} a toutes les propriétés voulues.
Étape 3 : On conclut.
Vu que $n_{k+1} > n_k$, on a bien que (n_k) définit une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. De plus, par le corollaire du critère des deux gendarmes (voir corollaire 3.21, page 73) on a que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - l = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l,$$

ce qui termine la démonstration.
Remarquons qu'une construction similaire nous permet de montrer qu'une sous suite de (x_n) converge vers $\liminf_{n\to\infty} x_n$. □

Remarque 3.34.
En réalité, au vu de la preuve, on peut être plus précis : Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ et $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sont des points d'accumulation de (x_n).

Proposition 3.35.
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite.

(i) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge, toutes les sous-suites de (x_n) convergent vers $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée, et $\lambda \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de (x_n), alors

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lambda \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

(iii) Si $(x_{n_k})_{k\geq 0}, (x_{m_k})_{k\geq 0}$ sont deux sous-suites telles que

$$\{n_k \ :\ k \geq 0\} \cup \{m_k \ :\ k \geq 0\} = \mathbb{N}$$

(les deux sous-suites couvrent la suite en entier) et

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = l.$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

Démonstration. (*i*) Soit $(x_{n_k})_{k\geq 0} \subset (x_n)$ une sous-suite et $l = \lim_{n\to\infty} x_n$.
On doit montrer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq K,\ |x_{n_k} - l| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Vu que (x_n) converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|x_n - l| \leq \varepsilon.$$

Par la remarque 3.31, page 86, on a que $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Par définition, ceci implique qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$,

$$n_k \geq N.$$

Ainsi, combinant les deux, on déduit que pour tout $k \geq K$

$$|x_{n_k} - l| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

(*ii*) Soit $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite convergente.
On sépare la démonstration en plusieurs étapes.
Étape 1 : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\{x_{n_m} \ :\ m \geq k\} \subset \{x_m \ :\ m \geq k\}.$$

En effet, si $m \geq k$ alors, par (3.31.1), page 86, on a

$$n_m \geq m \geq k,$$

et donc si $x_{n_m} \in \{x_{n_m} \ :\ m \geq k\}$, on a $x_{n_m} \in \{x_m \ :\ m \geq k\}$.
Étape 2 : On montre que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Soient

$$\begin{aligned} b_n &= \sup\{x_m \ :\ m \geq n\} \\ \beta_k &= \sup\{x_{n_l} \ :\ l \geq k\}. \end{aligned}$$

Par l'étape 1 et la proposition 1.13, page 38, on a

$$b_k \geq \beta_k.$$

De plus, on a

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \beta_k.$$

Ainsi, par les propositions 3.29, page 81 et 3.17, page 70, on déduit

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \limsup_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \beta_k \leq \lim_{k\to\infty} b_k = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

qui finit la démonstration de cette étape.

Étape 3 : On montre que
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geq \liminf_{n\to\infty} x_n$$
Soient
$$\begin{aligned} a_n &= \inf\{x_m \ : \ m \geq n\} \\ \alpha_k &= \inf\{x_{n_l} \ : \ l \geq k\}. \end{aligned}$$
Par l'étape 1 et la proposition 1.13, page 38, on a
$$a_k \leq \alpha_k.$$
De plus, on a
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{et} \qquad \liminf_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \alpha_k.$$
Ainsi, par les propositions 3.29, page 81 et 3.17, page 70, on déduit
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \liminf_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \geq \lim_{k\to\infty} a_k = \liminf_{n\to\infty} x_n$$
qui finit la démonstration de ce point.

(iii) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall k \geq K_1,\ |x_{n_k} - l| \leq \varepsilon \qquad\qquad \forall k \geq K_2,\ |x_{m_k} - l| \leq \varepsilon.$$
Soit $N = \max\{n_{K_1}, n_{K_2}\}$. Montrons que
$$\forall n \geq N,\ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$
Pour tout $n \geq N$, vu que $\{n_k \ : \ k \geq 0\} \cup \{m_k \ : \ k \geq 0\} = \mathbb{N}$, on a $n \in \{n_k \ : \ k \geq 0\}$ ou $n \in \{m_k \ : \ k \geq 0\}$. Pour $n \geq N$ quelconque, on distingue deux cas, pas nécessairement exclusifs.

Cas 1 : $n \in \{n_k \ : \ k \geq 0\}$.
Dans ce cas, il existe k tel que $n = n_k$. De plus, vu que $n_k = n \geq N \geq n_{K_1}$, on a nécessairement $k \geq K_1$. Ainsi,
$$|x_n - l| = |x_{n_k} - l| \leq \varepsilon,$$
qui est le résultat voulu dans ce cas.

Cas 2 : $n \in \{m_k \ : \ k \geq k_0\}$.
Dans ce cas, il existe k tel que $n = m_k$. De plus, vu que $m_k = n \geq N \geq n_{K_2}$, on a nécessairement $k \geq K_2$. Ainsi,
$$|x_n - l| = |x_{m_k} - l| \leq \varepsilon,$$
qui est le résultat voulu dans ce cas et termine la démonstration. □

Remarque 3.36. (i) Pour montrer qu'une suite ne converge pas, une méthode est d'extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes. Le point (i) de la proposition nous garantit alors que la suite diverge.

(ii) La proposition, ensemble avec la remarque 3.34 nous dit que $\limsup_{n\to\infty} x_n$ est le plus grand point d'accumulation possible et $\liminf_{n\to\infty} x_n$ est le plus petit point d'accumulation possible.

Exemple 3.37. (i) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = \begin{cases} \frac{n^2+2}{n^2+4} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \\ \frac{n^4+1}{n^4+n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrons que (x_n) converge vers 1.
Soit $n_k = 2k$, et $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ la sous-suite des termes pairs. Alors,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)^2+2}{(2k)^2+4} = \lim_{k\to\infty} \frac{4+\frac{2}{k^2}}{4+\frac{4}{k^2}} = \frac{4}{4} = 1.$$

Soit encore $m_k = 2k-1$ et $(x_{m_k})_{k\geq 1}$ la sous-suite des termes impairs. Alors

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-1)^4+1}{(2k-1)^4+(2k-1)^2} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{16k^4-32k^3+24k^2-8k+2}{16k^4-32k^3+28k^2-12k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{16-\frac{32}{k}+\frac{24}{k^2}-\frac{8}{k^3}+\frac{2}{k^4}}{16-\frac{32}{k}+\frac{28}{k^2}-\frac{12}{k^3}+\frac{2}{k^4}} \\ &= \frac{16}{16} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la sous-suite des nombres pairs et celles des nombres impairs convergent toutes deux vers la même limite. Vu que les pairs et les impairs couvrent tous les entiers, on déduit que (x_n) converge vers 1.

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

On a

$$x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = -1,\ x_7 = 0,\ x_8 = 1, \ldots$$

En particulier, si $n_k = 4k$, on a

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} \cos\left(4k\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos(2k\pi) = 1.$$

De plus, si $m_k = 4k+2$, on a

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \cos\left((4k+2)\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos(2k\pi+\pi) = -1.$$

Ainsi, on a trouvé deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes et donc la suite diverge.

Exemple 3.38 (Méthode de calcul de $\limsup$ et $\liminf$)**.**
Si (x_n) est composé d'un nombre fini de sous-suites convergentes, ou, en d'autres termes, si on trouve un nombre finis de sous-suites convergentes qui couvrent la suite en entier, la limsup est donnée par la plus grande limite parmi les limites des sous-suites et la liminf est donnée par la plus petite limite parmi les limites des sous-suites.
Regardons quelques exemples :

(i) Soit

$$\begin{cases} \frac{n^2}{2n^2+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \\ \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)\cos(n^2) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

alors, la sous-suite des termes pairs converge :

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2}{8k^2+1} = \frac{1}{2}$$

et la sous-suite des termes impairs converge :

$$|x_{2k+1}| = \left|\frac{2k+1}{2k+2} - 1\right| \left|\cos((2k+1)^2)\right| \leq \left|\frac{k}{k+1} - 1\right|.$$

Vu que $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{k}{k+1} - 1\right| = 0$, on a par le corollaire du critère des deux gendarmes,

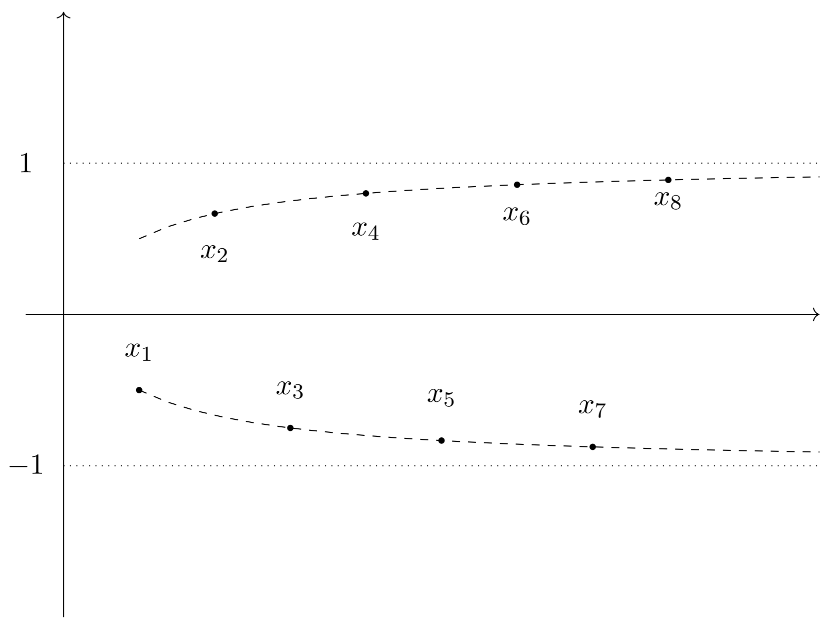
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = 0.$$

Vu que la sous-suite des pairs et la sous-suite des impairs recouvrent toute la suite (i.e. n'importe quel indice n peut s'écrire comme $n = 2k$ ou $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n &= \max\left\{\lim_{k\to\infty} x_{2k}, \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\right\} = \max\{0, 1/2\} = 1/2 \\ \liminf_{n\to\infty} x_n &= \min\left\{\lim_{k\to\infty} x_{2k}, \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\right\} = \min\{0, 1/2\} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$



Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \\ -\frac{n}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Étudions donc les deux sous-suites $(x_{2k})_{k\geq 0}, (x_{2k+1})_{k\geq 0} \subset (x_n)_{n\geq 0}$. On a

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+1} = 1.$$

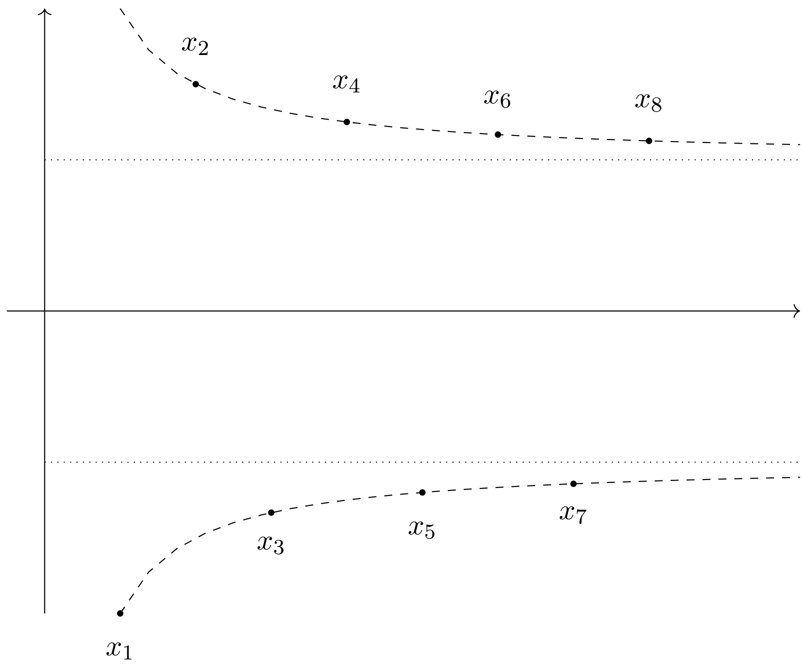
Et

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -\frac{2k-1}{2k-1+1} = -1.$$

Vu que la sous-suite des pairs et la sous-suite des impairs recouvrent toute la suite (i.e. n'importe quel in indice n peut s'écrire comme $n = 2k$ ou $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max\left\{\lim_{k\to\infty} x_{2k}, \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\right\} = \max\{-1, 1\} = 1$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min\left\{\lim_{k\to\infty} x_{2k}, \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\right\} = \min\{-1, 1\} = -1.$$

(*iii*) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.



Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Étudions donc les deux sous-suites $(x_{2k})_{k\geq 0}, (x_{2k+1})_{k\geq 0} \subset (x_n)_{n\geq 0}$. On a

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{2k} = 1.$$

Et
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} -1 - \frac{1}{2k+1} = -1.$$
Vu que la sous-suite des pairs et la sous-suite des impairs recouvrent toute la suite (i.e. n'importe quel in indice n peut s'écrire comme $n = 2k$ ou $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$) on a
$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} x_n &= \max\left\{\lim_{k\to\infty} x_{2k}, \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\right\} = \max\{-1,1\} = 1\\ \liminf_{n\to\infty} x_n &= \min\left\{\lim_{k\to\infty} x_{2k}, \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}\right\} = \min\{-1,1\} = -1.\end{aligned}$$

(*iv*) Soit
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$
Remarquons que
$$\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 3k \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 3k+1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 3k+2 \end{cases}$$
Étudions donc les trois sous-suites $(x_{3k}), (x_{3k+1}), (x_{3k+2}) \subset (x_n)$.
On a
$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x_{3k} &= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{3k}\right)0 = 0\\ \lim_{k\to\infty} x_{3k+1} &= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{3k+1}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \lim_{k\to\infty} x_{3k+2} &= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{3k+2}\right)\frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$
Vu que ces trois sous-suites couvrent la suite en entier (i.e. n'importe quel indice n peut s'écrire comme $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$), on a
$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} x_n &= \max\left\{\lim_{k\to\infty} x_{3k}, \lim_{k\to\infty} x_{3k+1}, \lim_{k\to\infty} x_{3k+2}\right\}\\ &= \max\{0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\} = \sqrt{3}/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} x_n &= \min\left\{\lim_{k\to\infty} x_{3k}, \lim_{k\to\infty} x_{3k+1}, \lim_{k\to\infty} x_{3k+2}\right\}\\ &= \min\{0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\} = -\sqrt{3}/2\end{aligned}$$

La raison pour laquelle la méthode fonctionne est que vu que les différentes sous-suites couvrent la suite en entier, il ne peut pas y avoir d'autres points d'accumulation que ceux calculés avec les différentes limites des sous-suites (on n'entrera pas dans le détal de pourquoi ici) et donc, on a une description exacte de l'ensemble des points d'accumulation de la suite. Par la remarque 3.36, page 89, le plus grand point d'accumulation est la limsup et le plus petit point d'accumulation est la liminf.

Remarque 3.39.
La méthode de l'exemple précédent ne permet pas de calculer limsup et liminf dans tous les cas. Par exemple, la suite $\sin(n)$ a comme ensemble des points d'accumulation $[-1,1]$ (on n'entre pas dans le détail ici sur pourquoi) qui est infini. On n'a donc pas d'espoir de trouver un nombre fini de sous-suite qui capturent tous les points d'accumulations.

3.5 Séries

Définition 3.40 (Série)**.**
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite. La *série des* (a_n) est la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Un terme S_n de la suite (S_n) est appelé une *somme partielle* et a_k est appelé le *terme général* de la série.
Si (S_n) converge, on note sa limite (qu'on appelle des fois la *valeur de la série*)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

On écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

pour faire référence à la série ou à sa limite, en fonction du contexte.
On dit que la série *converge absolument* ou est *absolument convergente* si la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

converge.

Remarque 3.41. (i) Si a_k change de signe qu'un nombre fini de fois, convergence et convergence absolue de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sont équivalentes.

(ii) Lorsqu'on s'intéresse à la convergence absolue d'une série, on s'intéresse à la convergence d'une suite croissante :

$$\sum_{k=0}^{n+1} |a_k| = |a_{n+1}| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \geq \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$

il suffit donc de montrer que la suite de sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

est bornée pour avoir la convergence absolue de la série.

Exemple 3.42. (i) Soit $r > 0$ et la *série géométrique*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k.$$

Cette série converge pour $0 < r < 1$ et diverge pour $r \geq 1$. En effet, pour tout $r \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Vu que le membre de droite converge pour $r < 1$ (voir exemple 3.9, page 65) et diverge pour $r > 1$ (voir exemple 3.16, page 68) on a que la série converge pour $r < 1$ et diverge pour $r > 1$.

De plus, pour $r = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} r^n = n + 1$$

qui diverge également.

(*ii*) La *série harmonique* définie par

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverge.

En effet, on peut montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

admet une sous-suite non-bornée.

Soit $n_m = 2^m$. Alors,

$$\begin{aligned} S_{n_m} =& \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq \frac{1}{2^i}} \geq 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} 1 = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i}(2^i - 2^{i-1}) \\ =& 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Vu que

$$\lim_{m \to \infty} 1 + \frac{m}{2} = +\infty,$$

on a $(S_{n_m})_{m \geq 1}$ tend vers l'infini également et donc n'est pas bornée, et donc la série ne peut pas converger.

(*iii*) Soit $\alpha \geq 0$ et la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Alors la série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$. On ne peut pas le démontrer ici, on aura besoin des outils de l'intégrale généralisée (voir proposition 9.30, page 234).

(*iv*) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite et $a_k = x_{k+1} - x_k$. Alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, on a

$$S_n = x_{n+1} - x_1.$$

Donc, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge si et seulement si la suite (x_n) converge. On voit ici que même si les séries on l'air d'être des suites qui ont une certaine structure, en réalité, toute suite peut être étudiée comme une série.

Proposition 3.43.
Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, une série convergente. Alors,

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

est de Cauchy (voir théorème 3.24, page 77). Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$,

$$|S_n - S_m| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \geq N + 1$,

$$|a_n| = |S_n - S_{n-1}| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que (a_n) converge vers 0.

Remarque 3.44.
Comme vu dans l'exemple de la série harmonique, la réciproque est fausse. Il existe des suites $(a_k)_{k\geq 0}$ qui convergent vers 0 pour lesquelles la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

diverge.

3.6 Critères de convergence pour les séries

Théorème 3.45.
Une série qui converge absolument converge.

Démonstration. Soient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

tel que (T_n) converge. On montre que la suite (S_n) est de Cauchy (voir théorème 3.24, page 77). Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que (T_n) converge, elle est de Cauchy, et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N,\ |T_n - T_m| \leq \varepsilon.$$

Soient donc $n, m \geq N$ quelconques. Supposons sans perte de généralité que $n \geq m$. Alors,

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = T_n - T_m = |T_n - T_m| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que (S_n) est de Cauchy et donc (S_n) converge.

Théorème 3.46 (Critère de comparaison)**.**
Soient $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ deux séries.

(i) Si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge et qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, $|a_k| \leq b_k$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument (et donc converge).

(ii) *Si* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *diverge et qu'il existe* $K \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $k \geq K$, $0 \leq b_k \leq a_k$, *alors* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverge.*

Démonstration. (i) On définit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

On a que (S_n) est une suite croissante, on montre qu'elle est bornée.
Vu que par hypothèse (T_n) converge, elle est bornée, par une constante M (voir proposition 3.11, page 66).
Posons

$$C = M + \left|\sum_{k=0}^{K-1} a_k\right| - \sum_{k=0}^{K-1} b_k.$$

Montrons que pour tout $n \geq 0$,

$$|S_n| \leq C.$$

On distingue deux cas
Cas 1 : $n \geq K$.
Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}|S_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{K-1} a_k + \sum_{k=K}^{n} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{K-1} a_k\right| + \sum_{k=K}^{n} |a_k| \leq \left|\sum_{k=0}^{K-1} a_k\right| + \sum_{k=K}^{n} b_k \\ &= \left|\sum_{k=0}^{K-1} a_k\right| + T_n - \sum_{k=0}^{K-1} b_k \leq M + \left|\sum_{k=0}^{K-1} a_k\right| - \sum_{k=0}^{K-1} b_k = C.\end{aligned}$$

Cas 2 : $n \leq K - 1$.
Dans ce cas, on a

$$|S_n| \leq |S_K| \overset{\text{Cas 1}}{\leq} C.$$

Ainsi, on a que (S_n) est bornée et donc converge, ce qui veut dire que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument et donc converge.

(ii) Soient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|.$$

Le but est de montrer que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ce qui montrera que S_n diverge. On le fait en 2 étapes.
Étape 1 : On montre que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty.$$

Remarquons que (T_n) est une suite monotone. De plus, (T_n) ne peut pas converger sans quoi la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ serait absolument convergente et donc convergerait (voir théorème 3.45).

Or, pour une suite croissante, diverger est équivalent à

$$\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty,$$

ce qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 2 : On conclut.
On a, pour tout $n \geq K$,

$$\begin{aligned} S_n =& \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=K}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{K-1} a_k \geq \sum_{k=K}^{n} b_k + \sum_{k=0}^{K-1} a_k = \sum_{k=K}^{n} |b_k| + \sum_{k=0}^{K-1} a_k \\ =& T_n + \sum_{k=0}^{K-1} (a_k - |b_k|), \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} T_n + \sum_{k=0}^{K-1} (a_k - |b_k|) = +\infty,$$

ce qui termine la démonstration.

□

Corollaire 3.47 (Corollaire du critère de comparaison)**.**
Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ *une suite et la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*. Alors,*

(i) si il existe $\alpha > 1$ *tel que* $k^\alpha a_k$ *converge, la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge absolument.*

(ii) si il existe $\alpha \leq 1$ *tel que* $k^\alpha a_k$ *converge vers une limite non-nulle, la série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverge.*

Démonstration. (*i*) Soit $l = \lim_{k\to\infty} k^\alpha a_k$ et $\varepsilon = 1$. Par définition de la limite, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$,

$$|k^\alpha a_k - l| \leq \varepsilon = 1.$$

Ainsi, pour tout $k \geq K$,

$$|a_k| = \frac{1}{k^\alpha}|k^\alpha a_k| \leq \frac{1}{k^\alpha}\left(|k^\alpha - l| + |l|\right) \leq \frac{1}{k^\alpha}(|l| + 1).$$

De plus, vu que $\alpha > 1$, par l'exemple 3.42, page 94 on a que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|l|+1}{k^\alpha}$ converge. Par le critère de comparaison, la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument.

(*ii*) Soit $l = \lim_{k\to\infty} k^\alpha a_k \neq 0$. On distingue deux cas.
Cas 1 : $l > 0$.
Soit $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$,

$$|k^\alpha a_k - l| \leq \varepsilon = \frac{l}{2}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq K$,

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{1}{k^\alpha} k^\alpha a_k = \frac{1}{k^\alpha}\left(l + k^\alpha a_k - l\right) \geq \frac{1}{k^\alpha}\left(l - |k^\alpha a_k - l|\right) \geq \frac{1}{k^\alpha}\left(l - \frac{l}{2}\right) \\ =& \frac{1}{k^\alpha}\frac{l}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, vu que $\alpha \leq 1$, par l'exemple 3.42, page 94 on a que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \frac{l}{2}$ diverge. Par le critère de comparaison, la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.
Cas 2 : $l < 0$.
On applique alors le cas 1 à la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} -a_k,$$

qui diverge. Et donc, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\sum_{k=0}^{\infty} -a_k$$

diverge également.

Théorème 3.48 (Critère de d'Alembert pour les séries)**.**
Soit une suite $(a_k)_{k\geq 0}$ *telle que pour tout* k*,* $a_k \neq 0$ *et la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Supposons que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$$

existe.
Alors

(i) si $l < 1$*, la série converge absolument (et donc converge).*
(ii) si $l > 1$*, la série diverge.*
(iii) si $l = 1$*, on ne peut rien dire.*

Démonstration. L'hypothèse est exactement la même que celle du critère de d'Alembert pour les suites (voir théorème 3.23, page 74). On se permettra donc de reprendre certains résultats intermédiaires démontrés dans la preuve du critère de d'Alembert pour les suites.

(i) On a vu (voir (3.23.1), page 75) qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$,

$$|a_k| \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-K} |a_K|$$

Or, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-K} |a_K|$$

converge. En effet,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k-K} |a_K| = \frac{2|a_K|}{(l+1)^K s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l+1}{2}\right)^{k}.$$

Or, cette dernière série est une série géométrique de raison $\frac{l+1}{2} < 1$ et donc elle converge.
Ainsi, par le critère de comparaison, on a que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

converge absolument et donc converge.

(*ii*) Par le critère de d'Alembert pour les suites, on a que $(a_k)_{k\geq 0}$ diverge. Au vu de la proposition 3.43, page 95, on a que la série ne peut pas converger et donc elle diverge. $\square$

Théorème 3.49 (Critère de Cauchy, critère de la limsup)**.**
Soit la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

telle que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

existe. Alors,

(i) si $l < 1$, la série converge absolument (et donc converge).

(ii) si $l > 1$, la série diverge.

(iii) si $l = 1$, on ne peut rien dire.

Démonstration. (*i*) On sépare la preuve en deux étapes.

Étape 1 : On montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|a_n| \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

Soit $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$. Alors, par définition de la limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|} - l\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} - l + l \leq \left|\sqrt[n]{|a_n|} - l\right| + l \leq \varepsilon + l = \frac{1-l}{2} + l = \frac{1+l}{2}.$$

En élevant à la puissance n, on déduit que pour tout $n \geq N$,

$$|a_n| \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 2 : On conclut à l'aide du critère de comparaison.
Vu que $l < 1$, on a que $\frac{1+l}{2} < 1$. Donc, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+l}{2}\right)^k$$

converge. Ainsi, par le critère de comparaison,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

converge, ce qui est le résultat voulu.

(*ii*) On sépare la démonstration en deux étapes.

Étape 1 : On montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|a_n| \geq \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

Soit $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$. Alors, par définition de la limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|} - l\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} - l + l \geq -\left|\sqrt[n]{|a_n|} - l\right| + l \geq -\varepsilon + l = -\frac{l-1}{2} + l = \frac{1+l}{2}.$$

En élevant à la puissance n, on déduit que pour tout $n \geq N$,

$$|a_n| \geq \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.

Étape 2 On conclut.

Vu que $l > 1$, on a que $\frac{1+l}{2} > 1$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+l}{2}\right)^n = +\infty.$$

Ceci avec l'étape 1 implique que $(|a_n|)_{n\geq 1}$ tend vers plus l'infini et n'est donc pas bornée. En particulier il n'est pas possible que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (en effet, si ceci était vrai, (a_n) serait bornée. Voir proposition 3.11, page 66) Vu que la limite du terme général doit nécessairement tendre vers 0 pour que la série converge (voir proposition 3.43, page 95) il n'est pas possible que la série converge.

Remarque 3.50. (*i*) Le critère de la limsup porte ce nom car il est vrai si on remplace la limite dans

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

par la limsup.

(*ii*) On peut utiliser les critères de d'Alembert ou de la limsup pour retrouver pour quels r la série géométrique converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k.$$

Dans les deux cas, on a $l = |r|$ qui converge absolument si $|r| < 1$ et diverge si $|r| > 1$.

Le fait que les limites à calculer dans le critère de d'Alembert et dans le critère de la limsup ont la même valeur est en fait tout le temps vrai, du moment que les deux limites existent. En effet, on peut montrer que si la limite dans le critère de d'Alembert existe, alors la limite dans le critère de la limsup existe également et elles valent la même chose.

Théorème 3.51 (Critère des séries alternées)**.**
Soit une série
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
telle que

(i) pour tout $k \geq 0$, $a_{k+1}a_k \leq 0$,

(ii) pour tout $k \geq 0$, $|a_{k+1}| \leq |a_k|$,

(iii) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Alors,
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$
converge.

Démonstration. On distingue deux cas.
Cas 1 : $\exists k \geq 0$ tel que $a_k = 0$.
Dans ce cas, la série est en fait une somme finie. En effet, pour tout $n \geq k$,
$$0 \leq |a_n| \leq |a_k| = 0.$$
Ainsi, tous les termes de la sommes au delà d'un certain rang sont nuls et donc la série est une somme finie qui converge.
Cas 2 : $\forall k \geq 0$, $a_k \neq 0$
Soit
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$
Le but de la démonstration est de montrer que la sous suites des termes pairs de (S_n) et la sous-suite des termes impairs de (S_n) convergent vers la même limite. Pour ces sous-suites, on montrera que l'une est croissante et majorée et l'autre est décroissante et minorée.
Commencçons par remarquer qu'on peut supposer sans perte de généralité que $a_0 > 0$. En effet, si ce n'est pas le cas, on pose $b_k = -a_k$. La nouvelle série
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$
vérifie alors également les hypothèses du théorème mais, on a en plus $b_0 > 0$. De plus, vu que
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$
une de ces deux séries converge si et seulement l'autre converge.
On sépare maintenant la démonstration en huit étapes.
Étape 1 : On montre par récurrence que pour tout $k \geq 0$,
$$a_k = (-1)^k |a_k|.$$
Ancrage : Vu que $a_0 > 0$, on a
$$a_0 = |a_0| = (-1)^0 |a_0|$$
qui est le résultat quand $k = 0$.

Pas de récurrence : Supposons que $a_k = (-1)^k |a_k|$. Alors, vu que par hypothèse, $a_{k+1}a_k < 0$, on a $|a_{k+1}||a_k| = |a_{k+1}a_k| = -a_{k+1}a_k$. En divisant par $-a_k$, on obtient

$$a_{k+1} = -\frac{|a_{k+1}|}{a_k}|a_k| = -\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}a_k \overset{\text{H.R.}}{=} -\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}(-1)^k|a_k| = (-1)^{k+1}|a_{k+1}|$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 2 : On montre que pour tout $n \geq 0$, $S_{2n} \geq S_{2n+2}$.
On a

$$\begin{aligned} S_{2n+2} =& S_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \overset{\text{Étape 1}}{=} S_{2n} + (-1)^{2n+1}|a_{2n+1}| + (-1)^{2n+2}|a_{2k+2}| \\ =& S_{2n} + \underbrace{|a_{2n+2}| - |a_{2n+1}|}_{\leq 0} \leq S_{2n} \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 3 : On montre que pour tout $n \geq 0$, $S_{2n} \geq 0$.
On a

$$\begin{aligned} S_{2n} =& a_{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} a_k = a_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{2k} + a_{2k+1}) \\ \overset{\text{Étape 1}}{=}& (-1)^{2n}|a_{2n}| + \sum_{k=0}^{n-1}\Big((-1)^{2k}|a_{2k}| + (-1)^{2k+1}|a_{2k+1}|\Big) \\ =& \underbrace{|a_{2n}|}_{\geq 0} + \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(|a_{2k}| - |a_{2k+1}|)}_{\geq 0} \geq 0, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 4 : La sous-suite des termes pairs (S_{2n}) converge.
Par l'étape 2 (S_{2n}) est décroissante. De plus par l'étape 3, (S_{2n}) est minorée. Ainsi, par le théorème 3.22, page 73, (S_{2n}) converge. Notons sa limite a.
Étape 5 : On montre que pour tout $n \geq 0$, $S_{2n+1} \leq S_{2n+3}$.
On a

$$\begin{aligned} S_{2n+3} =& S_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} \overset{\text{Étape 1}}{=} S_{2n+1} + (-1)^{2n+2}|a_{2n+2}| + (-1)^{2n+3}|a_{2k+3}| \\ =& S_{2n+1} + \underbrace{|a_{2n+2}| - |a_{2n+3}|}_{\geq 0} \geq S_{2n+1} \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 6 : On montre que pour tout $n \geq 0$, $S_{2n+1} \leq a_0$.
On a

$$\begin{aligned} S_{2n+1} =& a_0 + a_{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} a_k = a_0 + a_{2n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{2k+1} + a_{2k+2}) \\ \overset{\text{Étape 1}}{=}& a_0 + (-1)^{2n+1}|a_{2n+1}| + \sum_{k=0}^{n-1}\Big((-1)^{2k+1}|a_{2k+1}| + (-1)^{2k+2}|a_{2k+2}|\Big) \\ =& a_0 \underbrace{-|a_{2n+1}|}_{\leq 0} + \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(|a_{2k+2}| - |a_{2k+1}|)}_{\leq 0} \leq a_0, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

Étape 7 : La sous-suite des termes impairs (S_{2n+1}) converge.
Par l'étape 5 (S_{2n+1}) est croissante. De plus par l'étape 6, (S_{2n+1}) est majorée. Ainsi, par le théorème 3.22, page 73, (S_{2n+1}) converge. Notons sa limite b.
Étape 8 : On conclut.
On a

$$|a-b| = \lim_{n\to\infty} |S_{2n} - S_{2n+1}| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Donc $a = b$. Ainsi, on est dans la situation où on a deux sous-suites de (S_n) qui couvrent tous les éléments de la suite et qui convergent vers la même limite. Par la proposition 3.35, page 87, on déduit que la suite (S_n) converge qui est le résultat voulu.

□

Exemple 3.52. (*i*) Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cos(k\tau)}{3^k}.$$

Montrons que la série converge. Soient

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cos(k\tau)}{3^k}$$
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{2^k \cos(k\tau)}{3^k}\right|$$
$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

La stratégie est la suivante : On a vu à l'exemple 3.42, page 94 que la série (R_n) converge. On utilise le critère de comparaison (théorème 3.46, page 96) pour en déduire que (T_n) converge. Ensuite on utilise le fait si (T_n) converge, alors (S_n) converge absolument et donc converge (théorème 3.45, page 96).
On a pour tout $k \geq 1$,

$$\left|\frac{2^k \cos(k\tau)}{3^k}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^k \underbrace{|\cos(k\tau)|}_{\leq 1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Ainsi, vu que $\sum_{k=1}^{\infty}(2/3)^k$ converge, on a par le critère de comparaison que T_n converge. Or ceci est par définiton le fait que S_n converge absolument et donc converge.

(*ii*) Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5+2n^3+4n}}.$$

On a

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^5+2n^3+4n}} = \frac{n}{\sqrt{n^5}} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^4}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^4}}}$$

Ainsi, si $\alpha = \frac{3}{2}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{n+1}{\sqrt{n^5+2n^3+4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^4}}} = 1$$

Vu que $\alpha > 1$, par le corollaire du critère de comparaison (corollaire 3.47, page 98) la série converge.

(iii) Soit la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
Soit $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}$. Alors,
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$
Ainsi, par le critère de d'Alembert, la série converge.

(iv) Soit la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{14^k}{k^k}.$$
Soit $a_k = 14^k/k^k$. Alors,
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{14}{k} = 0.$$
Ainsi, par le critère de la limsup, la série converge.

(v) Soit la *série harmonique alternée*,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
Contrairement à la série harmonique, la série harmonique alternée converge. On le montre avec le critère des séries alternées. Si $a_n = (-1)^{n+1}/n$, on a $a_{n+1}a_n = -1/(n(n+1)) < 0$, $|a_{n+1}| = 1/(n+1) < 1/n = |a_n|$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Ainsi, par le critère des séries alternées,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
converge.

Exemple 3.53 (Séries qui dépendent d'un paramètre)**.**
Des fois, on doit déterminer la convergence d'une série en fonction d'un paramètre qui est inconnu. On en a déjà vu des exemples

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \qquad \text{le paramètre est } r. \text{ La série converge si et seulement si } |r| < 1$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cos(k\tau)}{3^k} \qquad \text{le paramètre est } \tau. \text{ La série converge pour tout } \tau.$$

Pour déterminer les paramètres pour lesquels la série converge, on peut utiliser les critères de convergence. Voyons quelques exemples.

(i) Soit la série
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$
Pour quels x la série converge-t-elle ?

On utilise le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0.$$

Or, $0 < 1$ indépendament de x et donc la série converge pour tout x. En réalité, cette série est l'exponentielle de x. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(ii) Soit la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (t-1)^k.$$

Pour quels t la série converge-t-elle ?

On utilise le critère de la limsup :

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^k |t-1|^k} = 2|t-1|.$$

Le critère nous dit que si $2|t-1| < 1$ la série converge. Or, $2|t-1| < 1$ est équivalent à $-\frac{1}{2} < t-1 < \frac{1}{2}$ qui à son tour est équivalent à

$$\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}.$$

Aini, la série converge absolument si $t \in]1/2, 3/2[$.

De plus, à nouveau par le critère, la série diverge si $2|t-1| > 1$. Il reste à voir ce qui se passe si $2|t-1| = 1$. Or, $2|t-1| = 1$ est équivalent à $t = \frac{1}{2}$ ou $t = \frac{3}{2}$.

Si $t = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (t-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

qui diverge car on n'a pas $\lim_{k\to\infty} (-1)^k = 0$.

Si $t = \frac{3}{2}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (t-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

qui diverge car on n'a pas $\lim_{k\to\infty} 1 = 0$.

On conclut donc que la série converge absolument si $t \in]1/2, 3/2[$ et diverge sinon.

3.7 Suites définies par récurrence

Définition 3.54 (Suite définie par récurrence)**.**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Une *suite définie par récurrence* est une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ qui a la forme

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

On a alors

$$x_0 = a,\ x_1 = f(x_0) = f(a),\ x_2 = f(x_1) = f(f(a)),\ x_3 = f(x_2) = f(f(f(a))),\ \ldots$$

Remarque 3.55. (i) on peut établir des propriétés de ces suites par récurrence.

(ii) si f a suffisement de proriétés (plus précisément, si f est continue, on verra plus loin ce que ça veut dire) si une suite définie par récurrence converge, alors nécessairement sa limite est une solution de l'équation

$$l = f(l).$$

(iii) Généralement, il y a 3 stratégies pour montrer qu'une suite définie par récurrence est convergente.

(a) On trouve une formule close $x_n = g(n)$ et on étudie la suite avec les outils qu'on a développé pour les suites.

(b) On montre que (x_n) est monotone et bornée.

(c) On montre que (x_n) est une suite de Cauchy.

Écrire quelques termes de la suite permet souvent de choisir une de ces approches.

Exemple 3.56 (Suite définie par récurrence, cas affine)**.**
Soient $a, m, h \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + h$ et la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) = mx_n + h & \text{pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

En écrivant quelques termes de la suite, on a

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= mx_0 + h = ma + h \\ x_2 &= mx_1 + h = m^2a + mh + h \\ x_3 &= mx_2 + h = m^3a + m^2h + mh + h \end{aligned}$$

On devine donc qu'une formule close pour x_n est

$$x_n = m^n a + h \sum_{k=0}^{n-1} m^k$$

Vu que pour $m \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} m^k = \frac{1-m^n}{1-m}$ (voir exemple 0.59, page 29), on conjecture que pour tout $n \geq 0$

$$x_n = \begin{cases} a + nh & \text{si } m = 1 \\ \\ m^n a + \dfrac{1-m^n}{1-m} h & \text{si } m \neq 1. \end{cases}$$

En effet, montrons le par récurrence en distinguant les cas.
Cas 1 : $m = 1$
Ancrage : pour $n = 0$, la formule donne $x_0 = a$, qui est vrai par définition.
Pas de récurrence : Supposons que $x_n = a + nh$. Alors,

$$x_{n+1} = x_n + h = a + nh + h = a + (n+1)h,$$

ce qui démontre la formule ci-dessus dans ce cas.
Cas 2 : $m \neq 1$

Ancrage : Pour $n = 0$, la formule donne

$$x_0 = m^0 a + \frac{1 - m^0}{1 - m} h = a,$$

qui est vrai par définition.
Pas de récurrence : Supposons que $x_n = m^n a + \frac{1-m^n}{1-m} h$. Alors,

$$\begin{aligned} x_{n+1} =& m x_n + h = m^{n+1} a + m \frac{1 - m^n}{1 - m} h + h = m^{n+1} a + h \left(m \frac{1 - m^n}{1 - m} + 1 \right) \\ =& m^{n+1} a + h \frac{m - m^{n+1} + 1 - m}{1 - m} = m^{n+1} a + \frac{1 - m^{n+1}}{1 - m} h, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.
Maintenant qu'on a une formule pour la suite, on peut s'intéresser à quand elle converge. On distingue 4 cas.
Cas 1 : $|m| < 1$
On a alors que la suite converge vers $\frac{1}{1-m} h$ car $\lim_{n \to \infty} m^n = 0$. Remarquons qu'on peut aussi trouver la limite de la façon suivante : On a

$$l = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} m x_n + h = m \lim_{n \to \infty} x_n + h = ml + h.$$

En résolvant pour l, on trouve $l = \frac{1}{1-m} h$.
Cas 2 : $|m| > 1$
La suite converge alors si et seulement si $a = \frac{h}{1-m}$. La suite est alors constante égale à $\frac{1}{1-m} h$.
Cas 3 : $m = 1$
On a alors que la suite converge si et seulement si $h = 0$. La suite est alors constante égale à a.
Cas 4 : $m = -1$
On a alors $x_n = a$ si n est pair et $x_n = -a + h$ si n est impair. La suite converge si et seulement si $2a = h$. La suite est alors constante égale à $a = \frac{h}{2}$.
On a étudié cette suite en en trouvant une formule générale et on arrive à la conclusion que si $|m| < 1$ la suite converge et si $|m| \geq 1$, la suite converge si et seulement si elle est constante.

Exemple 3.57. (i) Soit la suite définie par récurrence $(x_n)_{n \geq 0}$ par

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n^2 & \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

Avant de s'intéresser à la convergence de la suite, calculons quelques termes de la suite et regardons quelles sont les limites possibles. On a

$$x_0 = \frac{1}{2}, \qquad x_1 = x_0^2 = \frac{1}{4}, \qquad x_2 = x_1^2 = \frac{1}{16}, \qquad ...$$

Si (x_n) converge, la limite l est solution de $l = l^2$, c'est-à-dire, $l = 0$ ou $l = 1$.
Au vu des quelques premiers termes de la suite, et des limites possible, on conjecture que (x_n) est décroissante, minorée et converge vers 0.
Dans une première étape, montrons par récurrence que $\forall n \geq 0,\ 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$.
Ancrage : Pour $n = 0$, on a $x_n = x_0 = \frac{1}{2}$. Vu que $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, le résultat est veai pour $n = 0$.

Pas de récurrence : Supposons que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
On a

$$x_{n+1} = x_n^2 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = x_n^2 \overset{x_n \leq \frac{1}{2}}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Donc, on a bien montré que $\forall n \geq 0$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$.
Montrons maintenant que (x_n) est décroissante : montrons que $\forall n \geq 0$, $x_{n+1} - x_n \leq 0$.
On a

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n = x_n(x_n - 1).$$

Or, vu que $x_n \geq 0$ et $x_n - 1 \leq -\frac{1}{2} \leq 0$, on a $x_n(x_n - 1) \leq 0$ et donc $x_{n+1} - x_n \leq 0$ et (x_n) est bien décroissante.
En conclusion, (x_n) est décroissante et minorée et vu que la limite est 0 ou 1, on a que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ car $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$.
Remarquons au passage que l'idée de montrer que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ vient du fait que si (x_n) est décroissante, alors, $\lim_{n\to\infty} x_n \leq x_n \leq x_0$. Si (x_n) avait été croissante, on aurait commencé par montrer que $x_0 \leq x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Soit la suite définie par récurrence $(x_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = \frac{\sin(x_n)+1}{2} \qquad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

On a

$$x_0 = \frac{1}{2}, \qquad x_1 = \frac{\sin(x_0)+1}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2},$$
$$x_2 = \frac{\sin(x_1)+1}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

L'expression devient très compliquée. De plus, si on s'intéresse aux solutions de $l = \frac{\sin(l)+1}{2}$, celles ci sont très difficile à calculer.
On montre que la suite est de Cauchy. On sépare la démonstration en quatre étapes.
Étape 1 : On montre que pour tout $n \geq 0$, $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$.
On a

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left|\frac{\sin(x_n)+1}{2} - \frac{\sin(x_{n-1})+1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\sin(x_n) - \sin(x_{n-1})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|2\sin\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right)\right| \\ &\overset{\sin|x| \leq |x|}{\leq} \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité trigonométrique

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Étape 2 : On montre par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|$
Ancrage : Pour $n = 0$, le membre de gauche est $|x_1 - x_0|$ tandis que le membre de droite est $\frac{1}{2^0}|x_1 - x_0| = |x_1 - x_0|$. Vu qu'on a bien $|x_1 - x_0| \leq |x_1 - x_0|$, le résultat est vrai pour $n = 0$.

Pas de récurrence : Supposons que $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|$ et montrons que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|x_1 - x_0|$.
On a

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \overset{\text{Étape 1}}{\leq} \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_m| \overset{\text{H.R.}}{\leq} \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|x_1 - x_0| = \frac{1}{2^{n+1}}|x_1 - x_0|,$$

qui est le résultat voulu et termine la démonstration de cette étape.
Étape 3 : On montre que pour tout $n, m \geq 0$,

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}}.$$

Soient $n, m \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
|x_{n+m} - x_n| =& |x_{n+m} - x_{n+m-1} + x_{n+m-1} - x_{n+m-2} + \\
& \dots + x_{n+2} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \\
\leq& |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \dots \\
& + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \\
=& \sum_{k=0}^{m-1} |x_{n+k+1} - x_{n+k}| \\
\overset{\text{Étape 2}}{\leq}& \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{n+k}}|x_1 - x_0| \\
=& \frac{|x_1 - x_0|}{2^n} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} \\
\leq& \frac{|x_1 - x_0|}{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
=& \frac{|x_1 - x_0|}{2^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 4 : On montre que (x_n) est de Cauchy en montrant que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, m \geq 0,\ |x_{n+m} - x_n| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que $\lim_{n \to \infty} \frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}} \leq \varepsilon$.
Ainsi, si $n \geq N$ et $m \geq 0$ sont quelconques, on a

$$|x_{n+m} - x_n| \overset{\text{Étape 3}}{\leq} \frac{|x_1 - x_0|}{2^{n-1}} \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.
Plus généralement, quand on cherche à montrer qu'une suite (x_n) définie par récurrence est de Cauchy, un bon point de départ est d'assayer de montrer qu'il existe une constante $c \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}|$$

En suivant les mêmes étapes que ci-dessus (qui sont faites dans le cas où $c = \frac{1}{2}$), on peut montrer que pour tout $n \geq 0$ et $m \geq 0$,

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{c^n} \frac{1}{1-c},$$

et qu'elle est de Cauchy.

Chapitre 4

Fonctions réelles

On s'intéresse dans ce chapitre aux fonctions $f\colon D \to \mathbb{R}$ où D est un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

4.1 Bornes, croissance, parité et périodicité

Définition 4.1 (Bornes, croissance, périodicité)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$. On dit que

(i) f est *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D$, $f(x) \leq M$. De plus, on note alors *le suprémum de f*
$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup f(D) = \sup\{f(x) \ : \ x \in D\}.$$

(ii) f est *minorée* si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D$, $f(x) \geq m$. De plus, on note alors *l'infimum de f*
$$\inf_{x \in D} f(x) = \inf f(D) = \inf\{f(x) \ : \ x \in D\}.$$

(iii) f est *bornée* si elle est minorée et majorée ce qui est équivalent à $\exists c > 0$ tel que $\forall x \in D$, $|f(x)| \leq c$.

(iv) f est *croissante* si $\forall x, y \in D$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.

(v) f est *décroissante* si $\forall x, y \in D$ tel que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.

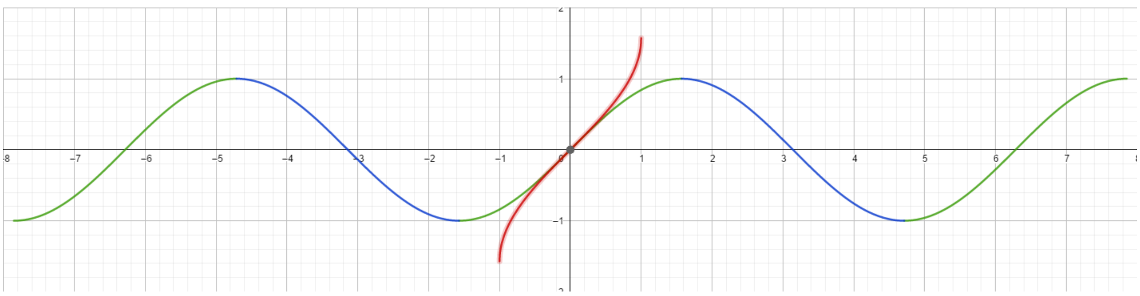
(vi) f est *strictement croissante* si $\forall x, y \in D$ tel que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$.

(vii) f est *strictement décroissante* si $\forall x, y \in D$ tel que $x < y$, on a $f(x) > f(y)$.

($viii$) f est *(strictement) monotone* si f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

(ix) f est *périodique* si il existe $T > 0$ tel que pour tout x tel que $x, x+T \in D$, on a $f(x+T) = f(x)$. On dit aussi que f est T-périodique.

Exemple 4.2. (i) Sinus et Arcsinus.



— Sinus et Arcsinus sont bornées.

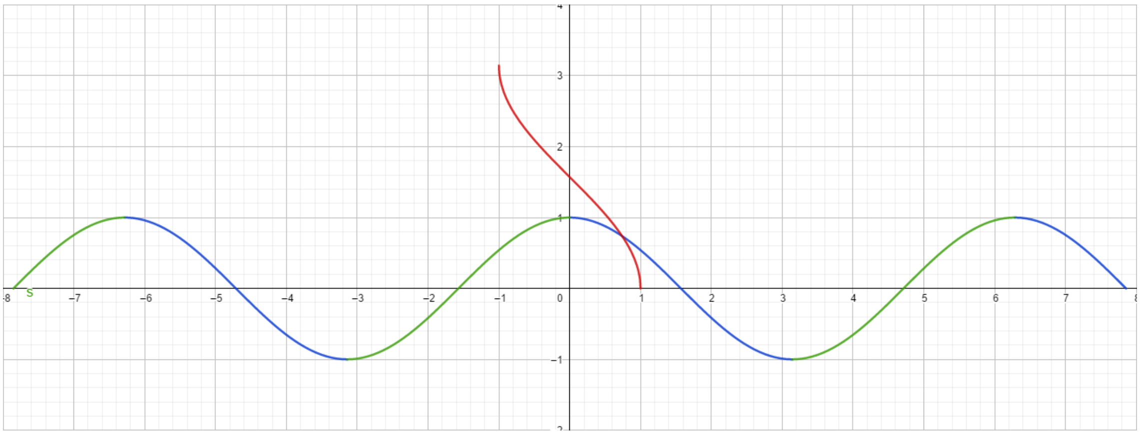
— Sinus est strictement croissant si le domaine est un sous-ensemble d'un intervalle du type $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— Sinus est strictement décroissant si le domaine est un sous-ensemble d'un intervalle du type $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— Sinus est 2π-périodique.

— Arcsin est strictement croissant.

(ii) Cosinus et Arccosinus.



— Cosinus et Arccosinus sont bornées.

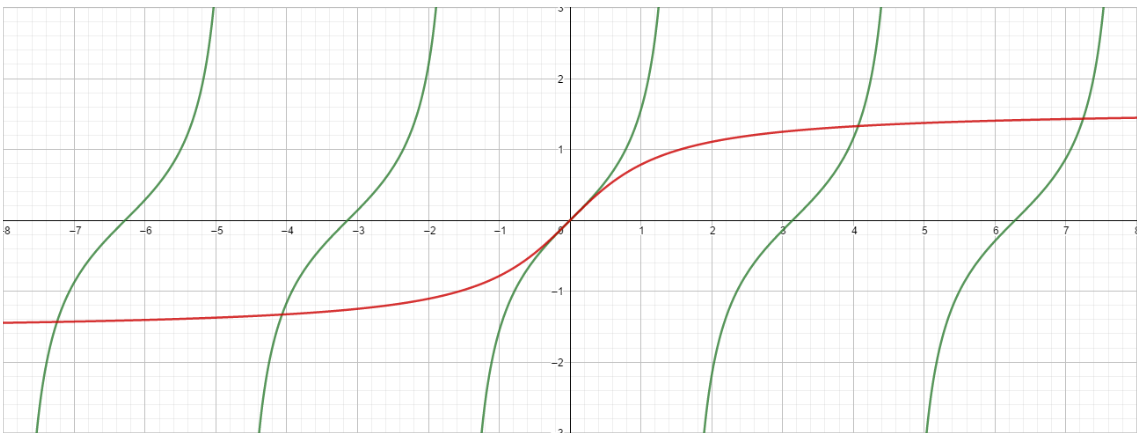
— Cosinus est strictement croissant si le domaine est un sous-ensemble d'un intervalle du type $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— Cosinus est strictement décroissant si le domaine est un sous-ensemble d'un intervalle du type $[2k\pi, \pi+2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— Cosinus est 2π-périodique.

— Arccosin est strictement décroissant.

(iii) Tangente et Arctangente.



— Tangente n'est pas bornée, mais Arctangente est bornée.

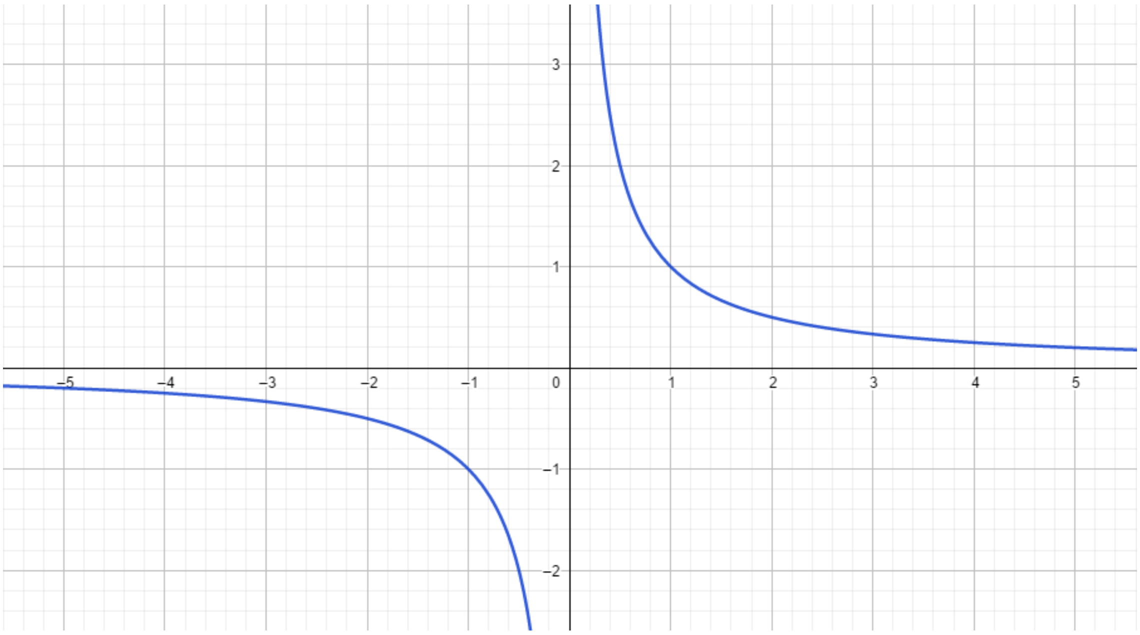
— Tangente est strictement croissant si le domaine est un sous-ensemble d'un intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— Tangente n'est pas monotone sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$.

— Tangente est π-périodique.

— Arctangente est strictement croissant.

(*iv*) La fonction $1/x$



— $\frac{1}{x}$ n'est pas bornée.

— $\frac{1}{x}$ est décroissante si le domaine est un sous-ensemble de $]-\infty, 0[$ ou de $]0, \infty[$.

— $\frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Définition 4.3 (Fonction paire, fonction impaire)**.** (*i*) Un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est *symétrique (par rapport à* 0*)* si pour tout $x \in D$, $-x \in D$.

(*ii*) Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que

(a) f est *paire* si $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

(b) f est *impaire* si $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 4.4. (*i*) On peut déterminer à l'aide du graphe d'une fonction si celle ci est paire ou impaire : Si en faisant une symétrie axiale selon l'axe vertical des ordonnées, le graphe ne change pas, la fonction est paire. Si en faisant une symétrique centrale de centre $(0, 0)$, le graphe ne change pas, la fonction est impaire.

(*ii*) Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Définissons $p, q : D \to \mathbb{R}$ par

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Alors, p est pair et q est impair et $f = p + q$. On appelle parfois p la *partie paire* et q la *partie impaire* de f.

Exemple 4.5. (i) Les fonctions x, x^3, $\sin(x)$, $\arcsin(x)$, $\tan(x)$, $\arctan(x)$ et $1/x$ sont impaires. Les fonction x^2, $\cos(x)$ sont paires. Les fonctions e^x, $\log(x)$ et $\arccos(x)$ ne sont ni paires ni impaires.

(ii) La partie paire de l'exponentielle est le *cosinus hyperbolique*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La partie impaire de l'exponentielle est le *sinus hyperbolique*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Proposition 4.6.
Soient $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique, $p_1, p_2 \colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions paires, $q_1, q_2 \colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires et $f \colon p_1(D) \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors,

(i) $p_1 + p_2$ *est paire.*

(ii) $p_1 \cdot p_2$ *est paire.*

(iii) $q_1 + q_2$ *est impaire.*

(iv) $q_1 \cdot q_2$ *est paire.*

(v) $p_1 \cdot q_1$ *est impaire.*

(vi) si $q_2(D) \subset D$, $q_1 \circ q_2$ *est impaire.*

(vii) si $q_1(D) \subset D$, $p_1 \circ q_1$ *est paire.*

(viii) $f \circ p_1$ *est pair.*

Démonstration. (i) Pour tout $x \in D$, on a

$$(p_1 + p_2)(-x) = p_1(-x) + p_2(-x) = p_1(x) + p_2(x) = (p_1 + p_2)(x),$$

qui est la résultat voulu.

(ii) Pour tout $x \in D$, on a

$$(p_1 \cdot p_2)(-x) = p_1(-x)p_2(-x) = p_1(x)p_2(x) = (p_1 \cdot p_2)(x)$$

qui est le résultat voulu.

(iii) Pour tout $x \in D$, on a

$$(q_1 + q_2)(-x) = q_1(-x) + q_2(-x) = -q_1(x) - q_2(x) = -(q_1 + q_2)(x)$$

qui est le résultat voulu.

(iv) Pour tout $x \in D$, on a

$$(q_1 \cdot q_2)(-x) = q_1(-x)q_2(-x) = (-q_1(x))(-q_2(x)) = (q_1 \cdot q_2)(x)$$

qui est le résultat voulu.

(v) Pour tout $x \in D$, on a

$$(p_1 \cdot q_1)(-x) = p_1(-x)q_1(-x) = p_1(x)(-q_1(x)) = -(p_1 \cdot q_1)(x)$$

qui est le résultat voulu.

(vi) Pour tout $x \in D$, on a

$$(q_1 \circ q_2)(-x) = q_1(q_2(-x)) = q_1(-q_2(x)) = -q_1(q_2(x)) = -(q_1 \circ q_2)(x)$$

qui est le résultat voulu.

(vii) Pour tout $x \in D$, on a

$$(p_1 \circ q_1)(-x) = p_1(q_1(-x)) = p_1(-q_1(x)) = p_1(q_1(x)) = (p_1 \circ q_1)(x)$$

qui est le résultat voulu.

(viii) Pour tout $x \in D$, on a

$$(f \circ p_1)(-x) = f(p_1(-x)) = f(p_1(x)) = (f \circ p_1)(x)$$

qui est le résultat voulu.

□

Proposition 4.7.
Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction T_f-périodique $g\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction T_g-périodique et $h\colon f(D) \to \mathbb{R}$. Alors,

(i) Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$, $f+g$ et $f \cdot g$ sont périodiques.

(ii) $h \circ f$ est T_f-périodique.

Démonstration. *(i)* On sépare la démonstration en trois étapes.

Étape 1 : On montre par récurrence que pour tous $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$,

$$f(x + nT_f) = f(x).$$

Ancrage : si $n = 0$, l'identité à démontrer se réduit à $f(x) = f(x)$ qui est bien vrai.

Pas de récurrence : Supposons que $f(x + nT_f) = f(x)$. Alors,

$$f(x + (n+1)T_f) = f(x + nT_f + T_f) = f(x + nT_f) \overset{\text{H.R.}}{=} f(x),$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.

Étape 2 : On montre que pour tous $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$,

$$f(x + nT_f) = f(x).$$

Si $n \geq 0$, le résultat est précisément ce qu'on a montré à l'étape 1. Si $n < 0$, on a, toujours par l'étape 1

$$f(x + nT_f) = f(x + nT_f - nT_f) = f(x),$$

qui est le résultat voulu.

Étape 3 : On conclut.

Soient $n, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tel que $\frac{T_f}{T_g} = \frac{m}{n}$. Alors, on a $nT_f = mT_g$. Ainsi, pour tout $x \in D$,

$$(f+g)(x + nT_f) = f(x + nT_f) + g(x + mT_g) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

ce qui montre que $f + g$ est nT_f-périodique.

De plus, pour tout $x \in D$,

$$(f \cdot g)(x + nT_f) = f(x + nT_f)g(x + mT_g) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x),$$

ce qui montre que $f \cdot g$ est nT_f-périodique et termine la démonstration de ce point.

(*ii*) Pour tout $x \in D$, on a

$$(h \circ f)(x + T_f) = h(f(x + T_f)) = h(f(x)) = h \circ f(x)$$

ce qui montre que $h \circ f$ est T_f périodique et termine la démonstration.

$\square$

Exemple 4.8. (*i*) $\sin^2(x) = (\sin(x))^2 = (f \circ \sin)(x)$ où $f(x) = x^2$.

On a sin 2π-périodique implique que $\sin^2$ est 2π-périodique.

De plus, f paire et sin impaire implique que $\sin^2$ est paire.

En réalité, $\sin^2$ est π-périodique :

$$\sin^2(x + \pi) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x).$$

(*ii*) Au vu des exemples standard de fonctions périodiques (sin, cos, tan, etc...) on peut penser qu'à partir du moment qu'une fonction est périodique, elle admet une plus petite période. Par exemple, sin et $2k\pi$-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Sa plus petite période est 2π. En général, il existe des fonctions périodiques pour lesquelles la notion de "plus petite" période n'est pas bien définie.

Soit la caractéristique des rationnels $\chi_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors pour tout $T \in \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$, $\chi_{\mathbb{Q}}$ est T-périodique. En effet soit $T \in \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ quelconque. Alors, si $x \in \mathbb{Q}$, on a $x + T \in \mathbb{Q}$. Donc, $\chi_{\mathbb{Q}}(x + T) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. D'un autre côté, si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors, $x + T \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. En effet, si $x + T \in \mathbb{Q}$, alors, $x = x + T - T \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Donc $\chi_{\mathbb{Q}}(x + T) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

On a donc bien que $\chi_{\mathbb{Q}}$ est T-périodique. Vu que l'ensemble $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ n'a pas de minimum, la notion de plus petite période n'existe pas dans ce cas.

(*iii*) Soit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x) = \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

On a tan π-périodique et sin 2π-périodique, donc $\tan(\sin(x))$ est 2π-périodique et $\sin(\tan(x))$ est π-périodique. Vu que $\frac{2\pi}{\pi} = 2 \in \mathbb{Q}$, on a que f est périodique.

La fonction f est également impaire car sin et tan sont impaires.

4.2 Limites de fonctions

Définition 4.9 (Fonction définie au voisinage d'un point, limite de fonction)**.**
Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$.

(*i*) On dit que f est *définie au voisinage de* x_0 si

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\} \subset D.$$

(*ii*) Supposons que f est définie au voisinage de x_0 et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que l *est la limite quand* x *tend vers* x_0 *de* f ou plus simplement, l *est la limite de* f *en* x_0 si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\} \text{ on a } |f(x) - l| \leq \varepsilon.}$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

(*iii*) Supposons que f est définie au voisinage de x_0. On dit que f *admet une limite en* x_0 si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que l est la limite de f quand x tend vers x_0, c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{array}{l}\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que} \\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \text{ on a } |f(x) - l| \leq \varepsilon.\end{array}}$$

Remarque 4.10. (*i*) On n'a pas besoin que $f(x_0)$ soit défini (en d'autre termes on n'a pas besoin que $x_0 \in D$) pour que la limite quand x tend vers x_0 de f ait un sens. De plus, si $x_0 \in D$ alors la limite l n'est pas nécessairement égale à $f(x_0)$.

(*ii*) Une façon équivalente d'écrire $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ est

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta,\ \text{on a } |f(x) - l| \leq \varepsilon.}$$

En effet,

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} \ :\ 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Exemple 4.11. (*i*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$, $x_0 = 2$. Montrons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 2} x = 2$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = \varepsilon > 0$ Alors, si x est tel que $0 < |x - 2| < \delta$, on a

$$|f(x) - l| = |x - 2| < \delta = \varepsilon,$$

qui montre bien que $\lim_{x\to 2} x = 2$.

(*ii*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et $x_0 = 2$. Montrons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 > 0$. Alors,

$$|f(x) - l| = |x^2 - 4| = \underbrace{|x + 2|}_{\leq |x|+2}\underbrace{|x - 2|}_{\leq \delta} \leq (\underbrace{|x|}_{\leq 2+\delta} + 2)\delta \leq \delta^2 + 4\delta$$

$$= 4 + \varepsilon - 4\sqrt{4 + \varepsilon} + 4 + 4\sqrt{4 + \varepsilon} - 8 = \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

(*iii*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 14 & \text{si } x \neq 0 \\ 58 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que $\lim_{x\to 0} f(x) = 14$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque et $\delta > 0$ quelconque. Alors, pour tout x tel que $x \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$, on a $x \neq 0$ donc,

$$|f(x) - 14| = |14 - 14| = 0 \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\lim_{x\to 0} f(x) = 14$. Remarquons ici que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Proposition 4.12 (Unicité de la limite).
Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est définie au voisinage de x_0. Si f admet une limite quand x tend vers x_0, cette limite est unique.

Démonstration. Montrons le résultat par l'absurde. Supposons que $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ sont deux limites de f quand x tend vers x_0 et que $l_1 \neq l_2$. Soit $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$. Par définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ qu'il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que

$$\text{pour tout } x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus\{x_0\}, \ |f(x) - l_1| \leq \varepsilon \tag{4.12.1}$$

$$\text{pour tout } x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus\{x_0\}, \ |f(x) - l_2| \leq \varepsilon. \tag{4.12.2}$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Alors, si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$, on a $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus\{x_0\}$ et $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus\{x_0\}$. Ainsi, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$, on a

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq \underbrace{|l_1 - f(x)|}_{\overset{(4.12.1)}{\leq} \ \varepsilon} + \underbrace{|f(x) - l_2|}_{\overset{(4.12.2)}{\leq} \ \varepsilon} \leq 2\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

ce qui est absurde, et montre que nécessairement $l_1 = l_2$. □

Théorème 4.13 (Caractérisation des limites de fonctions par les suites)**.**
Soient $D \subset \mathbb{R}$, $x_0, l \in \mathbb{R}$ et $f \colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Alors,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si et seulement si

$$\boxed{\forall (a_n)_{n \geq 1} \textit{ tel que } a_n \in D\setminus\{x_0\} \textit{ pour tout } n \geq 1 \ \textit{ et } \lim_{n \to \infty} a_n = x_0, \ \textit{on a } \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l.}$$

Démonstration. On commence par supposer que

$$\forall (a_n)_{n \geq 1} \text{ tel que } a_n \in D\setminus\{x_0\} \text{ pour tout } n \geq 1 \ \text{ et } \lim_{n \to \infty} a_n = x_0, \ \text{on a } \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l.$$

Montrons qu'alors,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

On montre le résultat par contraposé.
On suppose donc que f n'admet pas pour limite l quand x tend vers x_0. C'est-à-dire on suppose que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \ \exists x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\} \text{ tel que } |f(x) - l| > \varepsilon. \tag{4.13.1}$$

On doit montrer que la négation de la propriété encadrée dans l'énoncé est vraie. Vu que la propriété encadrée est équivalente à

$$\begin{aligned} &\forall (a_n)_{n \geq 1} \text{ tel que } a_n \in D\setminus\{x_0\} \text{ pour tout } n \geq 1 \ \text{ et } \lim_{n \to \infty} a_n = x_0, \\ &\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N, \ |f(a_n) - l| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La négation de cette propriété est

$$\begin{aligned} &\exists (a_n)_{n \geq 1} \text{ tel que } a_n \in D\setminus\{x_0\} \text{ pour tout } n \geq 1 \ \text{ et } \lim_{n \to \infty} a_n = x_0, \\ &\exists \varepsilon > 0, \ \text{tels que } \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N, \ \text{tel que } |f(a_n) - l| > \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.13.2}$$

Vu que f est définie au voisinage de x_0, il existe $\gamma > 0$ tel que $]x_0 - \gamma, x_0 + \gamma[\setminus\{x_0\} \subset D$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ comme dans (4.13.1). Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on utilise la propriété (4.13.1) avec γ/n qui joue le rôle de δ. C'est à dire,

$$\exists a_n \in]x_0 - \gamma/n, x_0 + \gamma/n[\backslash\{x_0\} \ \text{ tel que } |f(a_n) - l| > \varepsilon.$$

On a ainsi construit une suite $(a_n)_{n\geq 1}$. Voyons que cette suite est bien la suite cherchée dans (4.13.2).
Vu que $a_n \in]x_0-\gamma/n, x_0+\gamma/n[\backslash\{x_0\} \subset]x_0-\gamma, x_0+\gamma[\backslash\{x_0\} \subset D\backslash\{x_0\}$, on a $a_n \in D\backslash\{x_0\}$.
De plus vu que $a_n \in]x_0 - \gamma/n, x_0 + \gamma/n[$, on a

$$x_0 - \frac{\gamma}{n} < a_n < x_0 + \frac{\gamma}{n}.$$

Et donc, par le critère des deux gendarmes (théorème 3.20, page 73) on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0.$$

Si maintenant $N \in \mathbb{N}$ est quelconque, en prenant $n = N$, on a

$$|f(a_n) - l| = |f(a_N) - l| > \varepsilon.$$

La suite (a_n) a donc toutes les propriétés énoncées dans (4.13.2) et ceci termine la démonstration de la première implication.
Passons maintenant à l'autre implication. On suppose que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

et on montre que

$$\begin{aligned} &\forall (a_n)_{n\geq 1} \text{ tel que } a_n \in D\backslash\{x_0\} \text{ pour tout } n \geq 1 \ \text{ et } \lim_{n\to\infty} a_n = x_0, \\ &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N,\ |f(a_n) - l| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit donc $(a_n)_{n\geq 1}$ comme ci-dessus et $\varepsilon > 0$ quelconque.
Vu que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$, on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.
Vu que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, on a qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - x_0| \leq \delta/2 < \delta$.
De plus vu que $a_n \in D\backslash\{x_0\}$ on a $a_n \neq x_0$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a

$$0 < |a_n - x_0| < \delta.$$

Et donc, pour tout $n \geq N$,

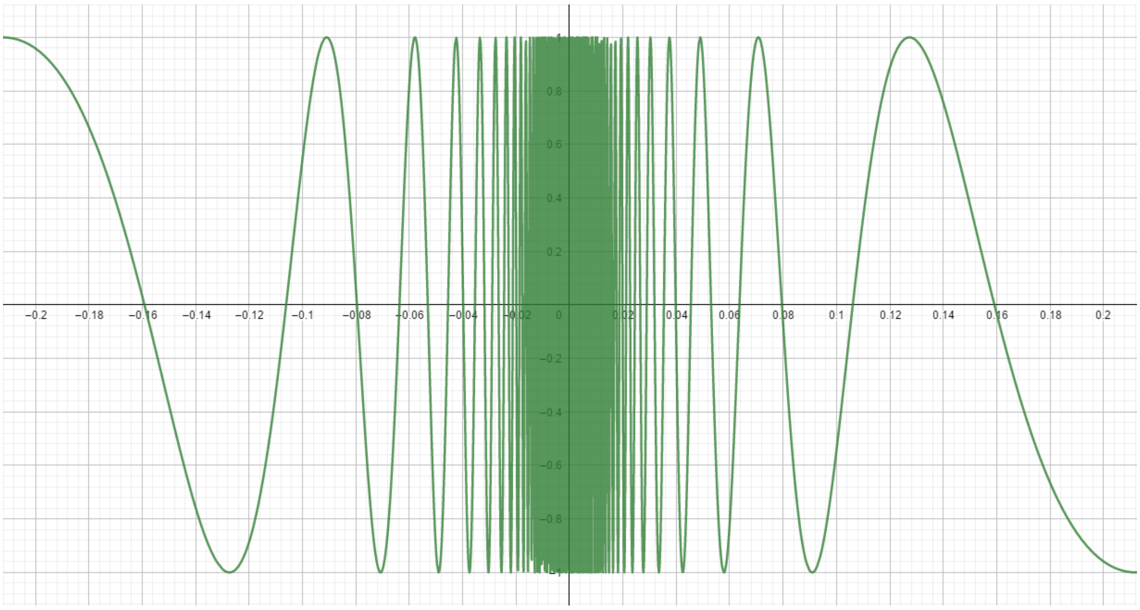
$$|f(a_n) - l| \leq \varepsilon.$$

Ceci termine la démonstration. □

Remarque 4.14.
Ce résultat est particulièrement utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite. Si il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ qui convergent vers x_0 et telles que $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers des limites différentes, la fonction f ne peut pas admetre de limite quand x tend vers x_0.

Exemple 4.15.
Soit $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



et soient

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \neq 0$$
$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \neq 0.$$

On a pour tout $n \geq 1$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
De plus,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

on conclut donc $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Lemme 4.16.
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 telle que f admet une limite en x_0. Alors, il existe $\delta, c > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}$,

$$|f(x)| \leq c.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}$,

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Posons $c = |l| + \varepsilon$. Alors, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$,

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l| \leq \varepsilon + |l| = c,$$

qui est le résultat voulu. $\square$

Proposition 4.17.
Soient $D, E \subset \mathbb{R}$, $x_0, a, b \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ définies au voisinages de x_0 et telles que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = b.$$

Alors,

(i)
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b.$$

(ii)
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

(iii) Si $b \neq 0$,
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

(iv) Si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$, $f(x) = g(x)$, alors $a = b$.

(v) Si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$, alors, $a \leq b$.

Démonstration. On peut démontrer ce résultat à l'aide de la caractérisation des limites par les suites (théorème 4.13, page 119) et du résultat similaire qu'on a démontré pour les suites (proposition 3.17, page 70). On propose ici une démonstration qui n'utilise pas la caractérisation des limites de fonctions par les suites.

(i) On doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\},\ |f(x) + g(x) - a - b| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Par définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus\{x_0\},\ |f(x) - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus\{x_0\},\ |g(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Alors, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}$, on a $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus\{x_0\}$ et $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus\{x_0\}$. Ainsi,

$$|f(x) + g(x) - a - b| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) On doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\},\ |f(x)g(x) - ab| \leq \varepsilon.$$

Par le lemme 4.16, il existe $\delta_0, c > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[$,

$$|f(x)| \leq c.$$

De plus, par définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\backslash\{x_0\},\ |f(x) - a| \leq \frac{\varepsilon}{c + |b|}\\
&\forall x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\backslash\{x_0\},\ |g(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{c + |b|}.
\end{aligned}$$

Soit $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} > 0$. Alors, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}$, on a $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\backslash\{x_0\}$, $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\backslash\{x_0\}$ et $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\backslash\{x_0\}$. Donc,

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - ab| =& |f(x)g(x) - f(x)b + f(x)b - ab| \leq |f(x)||g(x) - b| + |b||f(x) - a|\\
\leq& c\frac{\varepsilon}{c + |b|} + |b|\frac{\varepsilon}{c + |b|} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

(*iii*) On sépare la démonstration en 3 étapes.
Étape 1 : On montre que

$$\exists \delta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ |g(x)| \geq \frac{|b|}{2}$$

Par définition de $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, on a pour $\varepsilon = |b|/2 > 0$ qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}$, $|g(x) - b| \leq |b|/2$.
Ainsi, par l'inégalité du triangle inverse, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}$,

$$|g(x)| = |b + g(x) - b| \geq |b| - |g(x) - b| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 2 : On montre que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

On doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\},\ \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| \leq \varepsilon.$$

Par l'étape 1, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[$,

$$|g(x)| \geq \frac{|b|}{2}.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, par définition de $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\backslash\{x_0\}$,

$$|g(x) - b| \leq \frac{|b|^2\varepsilon}{2}$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Alors, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\backslash\{x_0\}$, on a $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\backslash\{x_0\}$ et $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\backslash\{x_0\}$. Ainsi,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|g(x) - b|}{|g(x)||b|} = |g(x) - b|\frac{1}{|g(x)|}\frac{1}{|b|} \leq \frac{|b|^2\varepsilon}{2}\frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|} = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 3 : On conclut.
Par l'étape 2 et le point précédent,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\frac{1}{g(x)}=a\frac{1}{b}=\frac{a}{b},$$

qui est le résultat voulu.

(*iv*) On montre le résultat par l'absurde. Supposons donc que $b\neq a$ et posons $\varepsilon=\frac{|b-a|}{4}$. Par hypothèse, il existe $\delta_0>$ tel que pour tout $x\in]x_0-\delta_0,x_0+\delta_0[$, $f(x)=g(x)$. De plus, par définition de $\lim_{x\to x_0}f(x)=a$ et $\lim_{x\to x_0}g(x)=b$, il existe $\delta_1,\delta_2>0$ tel que

$$\begin{aligned}&\forall x\in]x_0-\delta_1,x_0+\delta_1[\setminus\{x_0\},\ |f(x)-a|\leq\varepsilon\\&\forall x\in]x_0-\delta_2,x_0+\delta_2[\setminus\{x_0\},\ |g(x)-b|\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Soit $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}>0$. Alors, pour tout $x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\setminus\{0\}$, on a

$$|b-a|=|b-\underbrace{f(x)}_{=g(x)}+f(x)-a|\leq|b-g(x)|+|f(x)-a|\leq 2\varepsilon\leq\frac{|b-a|}{2},$$

ce qui est absurde et montre que $a=b$.

(*v*) On montre le résultat par l'absurde. Supposons que $b<a$ et posons $\varepsilon=\frac{a-b}{4}>0$. Alors, par définition de $\lim_{x\to x_0}f(x)=a$ et $\lim_{x\to x_0}g(x)=b$, il existe $\delta_1,\delta_2>0$ tel que

$$\begin{aligned}&\forall x\in]x_0-\delta_1,x_0+\delta_1[\setminus\{x_0\},\ |f(x)-a|\leq\varepsilon\\&\forall x\in]x_0-\delta_2,x_0+\delta_2[\setminus\{x_0\},\ |g(x)-b|\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned}&\forall x\in]x_0-\delta_1,x_0+\delta_1[\setminus\{x_0\},\ a-\varepsilon\leq f(x)\leq a+\varepsilon\\&\forall x\in]x_0-\delta_2,x_0+\delta_2[\setminus\{x_0\},\ b-\varepsilon\leq g(x)\leq b+\varepsilon.\end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe $\delta_0>$ tel que pour tout $x\in]x_0-\delta_0,x_0+\delta_0[$, $f(x)\leq g(x)$. Soit $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}>0$. En prenant la différence entre les deux égalités ci-dessus, on a pour tout $x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$,

$$b-a-2\varepsilon\leq g(x)-f(x)\leq b-a+2\varepsilon=b-a+\frac{a-b}{2}=\frac{b-a}{2}<0,$$

en particulier, $g(x)-f(x)<0$, ce qui entre en contradiction avec notre hypothèse.

□

Théorème 4.18 (Critère des deux gendarmes pour les fonctions)**.**
Soient $x_0\in\mathbb{R}$, $D,E,F\subset\mathbb{R}$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, $g\colon E\to\mathbb{R}$ et $h\colon F\to\mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0 telles que

(i) $\exists\delta>0$ *tel que* $\forall x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$, $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.

(ii) on a

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=l.$$

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Démonstration. On doit montrer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\},\ |g(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque et $\delta_0 > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Alors, par définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\},\ |f(x) - l| \leq \varepsilon \\ &\forall x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus \{x_0\},\ |h(x) - l| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} &\forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\},\ -\varepsilon \leq f(x) - l \\ &\forall x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus \{x_0\},\ h(x) - l \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} > 0$. Alors, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, on a $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\setminus \{x_0\}$. $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\}$ et $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[\setminus \{x_0\}$. Ainsi,

$$-\varepsilon \leq f(x) - l \leq g(x) - l \leq h(x) - l \leq \varepsilon,$$

qui implique

$$|g(x) - l| \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu. □

Corollaire 4.19.
Soient $x_0, l \in \mathbb{R}$, $D, E \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ et $g\colon E \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0 telles que

(i) $\exists \delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $|f(x) - l| \leq g(x)$

(ii) on a

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Alors,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Démonstration. Soient $\alpha(x) = l - g(x)$, $\beta(x) = g(x) + l$. Alors,

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} \beta(x) = l.$$

De plus, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$

$$-g(x) \leq f(x) - l \leq g(x).$$

Donc,

$$\alpha(x) = l - g(x) \leq f(x) \leq g(x) + l = \beta(x).$$

Ainsi, par le critère des deux gendarmes,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

qui est le résultat voulu. □

Exemple 4.20 (Limites de sinus et cosinus en 0)**.** (*i*) Calculons

$$\lim_{x\to 0} \sin(x).$$

Par la proposition 0.51, page 24, on a pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$|\sin(x) - 0| \leq |x|.$$

Vu que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, on a par le corollaire du critère des deux gendarmes que

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0.$$

(*ii*) Calculons

$$\lim_{x\to 0} \cos(x).$$

On utilise la formule trigonométrique

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2),$$

le point précédent et la proposition 4.17, page 122. On a

$$\lim_{x\to 0} 1 - \cos(x) = \lim_{x\to 0} 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cdot 0\cdot 0 = 0.$$

Ainsi, on déduit

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 - \lim_{x\to 0} (1 - \cos(x)) = 1.$$

(*iii*) Calculons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Par la proposition 0.51, page 24, on a pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Vu que

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0} 1,$$

on conclut par le critère des deux gendarmes que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Définition 4.21.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Alors, on dit que

(*i*) *f tend vers l'infini quand x tend vers x_0* si

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\},\ f(x) \geq M.$$

On note alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

(ii) *f tend vers moins l'infini quand x tend vers x_0* si

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\},\ f(x) \leq -M.$$

On note alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Remarque 4.22.
Si f tend vers l'infini ou moins l'infini quand x tend vers x_0, f n'admet pas de limite en x_0.

Exemple 4.23. (i) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ et il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0[\setminus \{x_0\}$, $f(x) \geq 0$.
Montrons que $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
Soit donc $M > 0$, $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$. Alors par définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\}$, on a

$$|f(x)| \leq \varepsilon = \frac{1}{M}.$$

Posons $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$. Alors, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{1}{f(x)} = \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{|f(x)|} \geq \frac{1}{\varepsilon} = M,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ et il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0 \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq 0$.
Montrons que $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
Soit donc $M > 0$, $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$. Alors par définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\}$, on a

$$|f(x)| \leq \varepsilon = \frac{1}{M}.$$

Posons $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$. Alors, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a

$$\frac{1}{f(x)} = -\left| \frac{1}{f(x)} \right| = -\frac{1}{|f(x)|} \leq -\frac{1}{\varepsilon} = -M,$$

qui est le résultat voulu.

(iii) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 telle que $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.
Montrons que $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ et $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Par définition de $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$,

$$|f(x)| \geq M.$$

Ainsi, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$,

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{M} = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

Proposition 4.24.
Soient $x_0, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $D, E \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ *définie au voisinage de* x_0 *et* $g\colon E \to \mathbb{R}$ *définie au voisinage de* l_1 *et telles que*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$.

(ii) $\lim_{x\to l_1} g(x) = l_2$.

(iii) il existe $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$, $f(x) \neq l_1$.

Alors,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l_2$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, par définition de $\lim_{x\to l_1} g(x) = l_2$, il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x \in]l_1-\gamma, l_1+\gamma[\setminus\{l_1\}$, $|g(x)-l_2| \leq \varepsilon$.
De plus, par définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ avec $\gamma/2$ qui joue le rôle de ε, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\setminus\{x_0\}$, $|f(x)-l_1| \leq \gamma/2 < \gamma$.
Pour finir, par notre troisième hypothèse, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\delta_2, x_0+\delta_2[\setminus\{x_0\}$, $f(x) \neq l_1$.
Soit maintenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Alors, pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$, on a

$$|f(x)-l_1| < \gamma \qquad \text{et} \qquad f(x) \neq l_1.$$

Ceci veut dire en particulier que

$$f(x) \in]l_1-\gamma, l_1+\gamma[\setminus\{l_1\},$$

et donc,

$$|g(f(x))-l_2| \leq \varepsilon,$$

ce qui est le résultat voulu. □

Exemple 4.25. (i) Calculons

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

On utilise l'identité trigonométrique $1-\cos(x) = 2\sin^2(x/2)$ pour avoir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x\cdot x} = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}$$

Posons $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $f(x) = \frac{x}{2}$. Alors, on a vu que $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. De plus, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} g(f(x))g(f(x)) = \frac{1}{2}.$$

(ii) Voyons un exemple qui illustre que la troisième hypothèse de la proposition est nécessaire. Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 14 & \text{si } x \neq 0 \\ 58 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 14.$$

Néanmoins, on a

$$g(f(x)) = g(0) = 58,$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 58 \neq 14 = \lim_{x\to 0} g(x).$$

4.3 Limites latérales et à l'infini

Définition 4.26 (limites latérales et à l'infini)**.**
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f *est défini à gauche de* x_0 si il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0[\subset D$.

(ii) On dit que f *est défini à droite de* x_0 si il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0, x_0 + \delta[\subset D$.

(iii) On dit que f *est défini au voisinage de* $+\infty$ si il existe $M > 0$ tel que $]M, +\infty[\subset D$.

(iv) On dit que f *est défini au voisinage de* $-\infty$ si il existe $M > 0$ tel que $]-\infty, -M[\subset D$.

(v) Supposons que f est définie à gauche de x_0 et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que l *est la limite de* f *quand* x *tend vers* x_0 *par la gauche* ou l *est la limite de* f *à gauche de* x_0 si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.}$$

On note alors

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

(vi) Supposons que f est définie à droite de x_0 et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que l *est la limite de* f *quand* x *tend vers* x_0 *par la droite* ou l *est la limite de* f *à droite de* x_0 si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.}$$

On note alors

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l.$$

(vii) Supposons que f est défini au voisinage de $+\infty$ et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que l *est la limite de* f *quand* x *tend vers plus l'infini* ou l *est la limite de* f *à plus l'infini* si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.}$$

On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

($viii$) Supposons que f est défini au voisinage de $-\infty$ et soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que l *est la limite de* f *quand* x *tend vers moins l'infini* ou l *est la limite de* f *à moins l'infini* si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \leq -M,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.}$$

On note alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

(ix) On dit que f *admet une limite à gauche de* x_0 si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que l est la limite de f à gauche de x_0, c'est-à-dire

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

(x) On dit que f *admet une limite à droite de* x_0 si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que l est la limite de f à droite de x_0, c'est-à-dire

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

(*xi*) On dit que f *admet une limite à plus l'infini* si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que l est la limite de f à $+\infty$, c'est-à-dire

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

(*xii*) On dit que f *admet une limite à moins l'infini* si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que l est la limite de f à $-\infty$, c'est-à-dire

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \leq -M,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Remarque 4.27.
Une fonction est définie au voisinage d'un point si et seulement si f est définie à gauche et à droite. De plus, f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet la même limite à gauche et à droite de x_0.

Exemple 4.28. (*i*) Soit *la fonction de Heaviside* $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Montrons que

$$\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} H(x) = 1.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque et $\delta > 0$ quelconque. Alors, pour tout x tel que $-\delta < x < 0$, on a

$$|H(x) - 0| = |0 - 0| = 0 \leq \varepsilon.$$

De plus, pour tout x tel que $0 < x < \delta$,

$$|H(x) - 1| = |1 - 1| = 0 \leq \varepsilon$$

ce qui montre bien que

$$\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} H(x) = 1.$$

(*ii*) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des paramètres et $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ b\sin(x) + a\cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Déterminons les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

existe. Comme mentionné dans la remarque 4.27, cette limite existe si et seulement si les limites

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

existent et sont égales.
Or, on a

$$\lim_{x \to 0} ax + b = b$$
$$\lim_{x \to 0} b\sin(x) + a\cos(x) = a.$$

Donc, à nouveau par la remarque 4.27,

$$\lim_{x\to 0^-} ax+b = b$$
$$\lim_{x\to 0^+} b\sin(x)+a\cos(x) = a.$$

Vu que pour tout $x<0$, $f(x)=ax+b$ et pour tout $x>0$, $f(x)=b\sin(x)+a\cos(x)$, on a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax+b = b$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} b\sin(x)+a\cos(x) = a.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

si et seulement si $a=b$.

(iii) Soit $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ défini par

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Soit donc $\varepsilon>0$ quelconque et $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\geq 0$. Alors, pour tout $x\geq M$, on a

$$|f(x)-0| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{M^2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

Définition 4.29.
Soit $f\colon D\to\mathbb{R}$ une fonction.

(i) Supposons que f est définie à gauche de $x_0\in\mathbb{R}$. Alors, on dit que f *tend vers l'infini quand* x *tend vers* x_0 *par la gauche* si

$$\forall C>0,\ \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x\in]x_0-\delta,x_0[,\ f(x)\geq C.$$

On note alors

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

(ii) Supposons que f est définie à gauche de $x_0\in\mathbb{R}$. Alors, on dit que f *tend vers moins l'infini quand* x *tend vers* x_0 *par la gauche* si

$$\forall C>0,\ \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x\in]x_0-\delta,x_0[,\ f(x)\leq -C.$$

On note alors

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

(iii) Supposons que f est définie à droite de $x_0\in\mathbb{R}$. Alors, on dit que f *tend vers l'infini quand* x *tend vers* x_0 *par la droite* si

$$\forall C>0,\ \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x\in]x_0,x_0+\delta[,\ f(x)\geq C.$$

On note alors

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty.$$

(iv) Supposons que f est définie à droite de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors, on dit que f *tend vers moins l'infini quand x tend vers x_0 par la droite* si

$$\forall C > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[,\ f(x) \leq -C.$$

On note alors

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

(v) Supposons que f est définie au voisinage de $+\infty$. Alors, on dit que f *tend vers l'infini quand x tend vers l'infini* si

$$\forall C > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M,\ f(x) \geq C.$$

On note alors

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

(vi) Supposons que f est définie au voisinage de $+\infty$. Alors, on dit que f *tend vers moins l'infini quand x tend vers l'infini* si

$$\forall C > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \geq M,\ f(x) \leq -C$$

On note alors

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

(vii) Supposons que f est définie au voisinage de $-\infty$. Alors, on dit que f *tend vers l'infini quand x tend vers moins l'infini* si

$$\forall C > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \leq -M,\ f(x) \geq C.$$

On note alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$(viii)$ Supposons que f est définie au voisinage de $-\infty$. Alors, on dit que f *tend vers moins l'infini quand x tend vers moins l'infini* si

$$\forall C > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \leq -M,\ f(x) \leq -C$$

On note alors

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple 4.30.
Soit $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. Montrons que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Soit $C > 0$ quelconque. Posons $\delta = \frac{1}{C}$. Alors, pour tout $x \in]-\delta, 0[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{-\delta} = -C,$$

ce qui montre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$$

De plus, pour tout $x \in]0, \delta[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\delta} = C,$$

ce qui montre que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Chapitre 5

Fonctions continues

5.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 5.1 (Ensemble ouvert, fermé)**.**
Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble. On dit que

(i) E *est ouvert* si pour tout $x_0 \in E$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset E$.

(ii) E *est fermé* si $\mathbb{R} \backslash E$ est ouvert.

Remarque 5.2. (i) Les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$.

(ii) Il existe des ensembles qui sont ni ouverts ni fermés.

(iii) Les intervalles ouverts sont ouverts et les intervalles fermés sont fermés.

(iv) Si D est ouvert et $f \colon D \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors pour tout $x_0 \in D$, f est définie au voisinage de x_0.

(v) On peut montrer qu'une union d'ensembles ouverts reste ouvert.

Définition 5.3 (Fonction continue)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f \colon D \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Soit $x_0 \in D$. Supposons que f est défini au voisinage de x_0. On dit que f *est continue en* x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est à dire,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.}$$

(ii) Supposons que D est ouvert. On dit que f *est continue* si pour tout $x_0 \in D$, f est continue en x_0, c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall x_0 \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.}$$

Remarque 5.4.
Si f n'est pas contine en un point x_0, il y a deux possibilités :

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas.

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe mais ne vaut pas $f(x_0)$.

Dans les deux cas, on a

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0 \ \exists x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ tel que } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Proposition 5.5.
Soient $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en x_0 et $h\colon f(D) \to \mathbb{R}$ continue en $f(x_0)$.
Alors,

(i) $f + g$ *est continue en* x_0.

(ii) $f \cdot g$ *est continue en* x_0.

(iii) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *est continue en* x_0.

(iv) $h \circ f$ *est continue en* x_0.

(v) Si $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ *est tel qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\varphi(x) = f(x)$, *alors,* φ *est continue en* x_0

Démonstration. (i) On a

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0),$$

qui est le résultat voulu.

(ii) On a

$$\lim_{x\to x_0}(f \cdot g)(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0) = (f \cdot g)(x_0),$$

(iii) On a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0),$$

qui est le résultat voulu.

(iv) On doit montrer que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ |h(f(x)) - h(f(x_0))| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors, par définition de la continuité de h en $f(x_0)$, il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x \in]f(x_0) - \gamma, f(x_0) + \gamma[$, $|h(x) - h(f(x_0))| \leq \varepsilon$.
Par définition de la continuité de f en x_0 avec $\gamma/2$ qui joue le rôle de ε, on a qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \gamma/2 < \gamma$. Ainsi, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a $f(x) \in]f(x_0) - \gamma, f(x_0) + \gamma[$ et donc $|h(f(x)) - h(f(x_0))| \leq \varepsilon$.

(v) Par la proposition 4.17, page 122, on a que

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

De plus, vu que $x_0 \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a $f(x_0) = \varphi(x_0)$, qui est le résultat voulu.

□

Proposition 5.6.
Les fonctions usuelles : les polynômes, les racines $n^{ème}$, la valeur absolue, sin*,* arcsin*,* cos*,* arccos*,* tan*,* arctan*,* e^x*,* log*,* cosh *et* sinh *sont continues là où elles sont définies.*

Démonstration. Cette démonstration utilise des résultats qui seront démontrés plus tard. On commence par les polynômes. La fonction identité, $f(x) = x$ est continue (prendre $\delta = \varepsilon$) et les fonctions constantes sont continues. Ainsi, par la proposition 5.5, page 134, les polynômes sont continus.

Les racines $n^{\text{ème}}$ sont la fonction réciproque d'une fonction continue et bijective, elles sont donc continues (voir théorème 6.16, page 154).
Passons à la valeur absolue. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ quelconques et posons $\delta = \varepsilon$. Si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est quelconque, on a par l'inégalité du triangle inverse,

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon,$$

qui montre que la valeur absolue est continue.
Passons au sinus. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = \varepsilon$. Alors, si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en utilisant que $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $|\sin(a)| \leq |a|$ et $|\cos(a)| \leq 1$, on a

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| \leq |x - x_0| \leq \delta = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.
Pour l'arcsinus, on utilise que c'est la fonction réciproque d'une fonction continue et bijective (voir théorème 6.16, page 154).
Passons au cosinus. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = \varepsilon$. Alors, si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, en utilisant que $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $|\sin(a)| \leq |a|$ et $|\sin(a)| \leq 1$, on a

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| = 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| \leq |x - x_0| \leq \delta = \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.
Pour l'arccosinus, on utilise que c'est la fonction réciproque d'une fonction continue et bijective (voir théorème 6.16, page 154).
Pour la tangente, vu que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, la continuité de la tangente découle de celle du sinus, du cosinus et de la proposition 5.5, page 134.
Pour l'arctangente, on utilise que c'est la fonction réciproque d'une fonction continue et bijective (voir théorème 6.16, page 154).
Pour l'exponentielle, on utilise le fait qu'elle est définie par une série entière

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

donc elle est C^∞ et donc continue.
Pour le logarithme, on utilise que c'est la fonction réciproque d'une fonction continue et bijective (voir théorème 6.16, page 154).
Pour finir, vu que $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ la continuité de découle de celle de l'exponentielle et de la proposition 5.5, page 134. □

Exemple 5.7. (i) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est continue.
On a que le sinus est continu sur $\mathbb{R}$. De plus, x est continu et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Donc par la proposition 5.5, page 134, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a que f est continue.

Pour $x_0 = 0$, on a vu que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0),$$

et donc f est également continu en 0 et donc f est continue.

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est continue.

On a x et sin continues sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et donc par la proposition 5.5, page 134, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Voyons encore que x est continue en 0.

On a,

$$|f(x)| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|,$$

et

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Ainsi par le corollaire du critère des deux gendarmes pour les fonctions (corollaire 4.19, page 125), on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

ce qui montre que f est continue en 0 et donc que f est continue.

(iii) Soient $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ deux paramètres et la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{bx} & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ a + bx^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Déterminons les paramètres pour lesquels f est continue.

Remarquons que par les propositions 5.5, page 134 et 5.6, page 134, on a que f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour que f soit encore continue en 0, on a besoin de deux choses : On a besoin que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe (qu'on établira en s'intéressant aux limites latérales) et on a également besoin que cette limite donne $f(0)$.

On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(ax)}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{b}\frac{\sin(ax)}{ax}.$$

En posant $y = ax$ et en utilisant la proposition 4.24, page 128 (vu que $a \neq 0$, $x \neq 0$ implique $y \neq 0$), on a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to 0} \frac{a}{b}\frac{\sin(y)}{y} = \frac{a}{b}.$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a + bx^2 = \lim_{x\to 0} a + bx^2 = a.$$

Ainsi, pour que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, il faut

$$\frac{a}{b} = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = a,$$

et donc nécessairement, $b = 1$. Pour que f soit continue en 0, il faut

$$a = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = b = 1.$$

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = b = 1$.

Définition 5.8 (Prolongement par continuité)**.**
Soient $D \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $f\colon D \to \mathbb{R}$ continue et $x_0 \in \mathbb{R}\backslash D$ tel que f est définie au voisinage de x_0 et tel que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe. Alors, la fonction $\tilde{f}_{x_0}\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue.
On appelle $\tilde{f}_{x_0}$ le *prolongement par continuité de f en x_0*.

Exemple 5.9.
Soit $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{x}.$$

On a que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0 : $\tilde{f}_0\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}_0(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Remarque 5.10.
Souvent on écrit juste f à la place de $\tilde{f}_{x_0}$ pour le prolongement par continuité de f en x_0.

Définition 5.11 (continuité à gauche, continuité à droite)**.**
Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$.

(i) Supposons que f est définie à gauche de x_0. On dit que f *est continue à gauche de* x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0],\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.}$$

(ii) Supposons que f est définie à droite de x_0. On dit que f *est continue à droite de* x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in [x_0, x_0 + \delta[,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.}$$

(*iii*) Supposons que $D = [a, b]$ avec $a < b$. On dit que f *est continue* si pour tout $x_0 \in]a, b[$, f est continue en x_0, et f est continue à droite de a et à gauche de b.

(*iv*) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que f *est continue* si pour tout $x_0 \in]a, +\infty[$, f est continue en x_0 et f est continue à droite de a.

(*v*) Supposons que $D =]-\infty, b]$. On dit que f *est continue* si pour tout $x_0 \in]-\infty, b[$, f est continue en x_0 et f est continue à gauche de b.

Remarque 5.12.
Une fonction est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche de x_0.

Exemple 5.13.
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Montrons que f est continue à droite de 0. On doit montrer

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in [0, \delta[, |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $\delta = \varepsilon^2$. Alors, pour tout $x \in [0, \delta[$, on a $x \leq \delta$ et donc

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que f est continue à droite de 0.

5.2 Fonctions continues sur des intervalles

Définition 5.14 (espace des fonctions continues $C^0(I)$)**.**
Soit I un intervalle. On définit *l'espace des fonctions continues sur I* par

$$\boxed{C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\ :\ f \text{ est continue}\}.}$$

Théorème 5.15 (Théorème de la valeur intermédiaire)**.**
Soient I un intervalle, $f \in C^0(I)$ et $a < b \in I$ Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = y.$$

Démonstration. On distingue deux cas.
Cas 1 : $f(a) \leq y \leq f(b)$.
Si $f(a) = y$ ou $f(b) = y$, le résultat est trivial (prendre $c = a$ ou $c = b$). Supposons donc que $f(a) < y < f(b)$.
Soit $S = \{x \in [a, b]\ :\ f(x) \leq y\} \subset [a, b]$. Alors, S est non-vide car $a \in S$ et S est majoré par b. Soit donc $c = \sup S$. Montrons que $f(c) = y$ en trois étapes :
Étape 1 : On montre $a < c$.
Soit $\varepsilon = y - f(a) > 0$. Alors, par continuité de f en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. En particulier, si $x = a + \delta/2$, on a

$$f(a + \delta/2) \leq f(a) + \varepsilon = y.$$

Ainsi, $a + \delta/2 \in S$ et vu que c est un majorant de S, on doit avoir $c \geq a + \delta/2 > a$.
Étape 2 : On montre $c < b$.

Soit $\varepsilon = \frac{f(b)-y}{2} > 0$. Alors, par continuité de f en b, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]b-\delta, b+\delta[$, $|f(x) - f(b)| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $x \in]b-\delta, b]$,

$$f(x) \geq f(b) - \varepsilon = \frac{f(b)+y}{2} > y.$$

Ainsi, pour tout $x \in]b-\delta, b]$, $x \notin S$ et donc vu que $S \subset [a,b]$, x est un majorant de S. Vu que c est le plus petit majorant, on a pour $x = b - \delta/2$,

$$c \leq b - \delta/2 < b.$$

Étape 3 : On montre que $f(c) = y$.
On montre que $\forall \varepsilon > 0$, $|f(c) - y| \leq \varepsilon$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Par continuité de f en c, il existe $0 < \delta < \min\{c-a, b-c\}$ tel que pour tout $x \in]c-\delta, c+\delta[$,

$$|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

ce qui est équivalent à ce que pour tout $x \in]c-\delta, c+\delta[$,

$$f(x) - \varepsilon \leq f(c) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Par la caractérisation du suprémum (voir théorème 1.11, page 36), il existe $x_1 \in S$ tel que $c - \delta/2 \leq x_1 \leq c$. Ainsi, $x_1 \in]c-\delta, c+\delta[$, donc

$$f(c) \leq f(x_1) + \varepsilon \overset{x_1 \in S}{\leq} y + \varepsilon.$$

De plus, si $x_2 = c + \frac{\delta}{2}$, alors $x_2 > c$ et donc $x_2 \notin S$. Ainsi, $x_2 \in]c-\delta, c+\delta[$ et

$$f(c) \geq f(x_2) - \varepsilon \overset{x_2 \notin S}{\geq} y - \varepsilon.$$

Les deux inégalités mises ensemble impliquent

$$|f(c) - y| \leq \varepsilon.$$

Vu que ε est quelconque, on a le résultat.
Cas 2 : $f(a) \geq y \geq f(b)$.
Posons alors $g(x) = -f(x)$. On a alors que g est continue et $g(a) = -f(a) \leq -y \leq -f(b) = g(b)$. Par le cas 1, il existe donc $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = -y$, c'est-à-dire,

$$f(c) = -g(c) = -(-y) = y$$

qui est le résultat voulu.

□

Définition 5.16 (Fonction qui prend son maximum, minimum)**.**
Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction.

(*i*) On dit que f *prend son maximum sur* D si il existe $x_0 \in D$ tel que

$$\forall x \in D,\ f(x) \leq f(x_0).$$

On a alors que le suprémum de f est un maximum et on note

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x_0).$$

(*ii*) On dit que f *prend son minimum sur* D si il existe $x_0 \in D$ tel que

$$\forall x \in D,\ f(x) \geq f(x_0).$$

On a alors que l'infimum de f est un minimum et on note

$$\min_{x \in D} f(x) = f(x_0).$$

Théorème 5.17 (Fonctions continues sur des intarvalles)**.**
Soient I un intervalle et $f \in C^0(I)$. Alors,

(*i*) *L'image de f, $f(I)$ est un intervalle.*

(*ii*) *Si f est strictement monotone et I est ouvert. Alors $f(I)$ est un intervalle ouvert.*

(*iii*) *Si I est un intervalle fermé borné, c'est-à-dire, $I = [a, b]$ avec $a < b$. Alors, f prend sont minimum et son maximum sur I et*

$$f(I) = \left[\min_{x \in I} f(x), \max_{x \in I} f(x)\right]$$

est un intervalle fermé borné.

Démonstration. (*i*) On utilise la caractérisation des intervalles (voir proposition 1.20, page 39). C'est-à-dire, pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, on montre que si $a, b \in f(I)$ sont tels que $a \leq b$, alors, $[a, b] \subset f(I)$.

Soient donc $a, b \in f(I)$ tels que $a \leq b$ quelconques. Montrons que $[a, b] \subset f(I)$. Soit donc $y \in [a, b]$. Par définition de $f(I)$, il existe $x_a, x_b \in I$ tel que $f(x_a) = a$ et $f(x_b) = b$. Par le théorème de la valeur intermédiaire (voir théorème 5.15, page 138), il existe $x \in [\min\{x_a, x_b\}, \max\{x_a, x_b\}] \subset I$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, $y \in f(I)$. y étant quelconque, on a le résultat.

(*ii*) On montre que $f(I)$ vérifie la définition d'ensemble ouvert, c'est-à-dire, on montre que pour tout $y \in f(I)$, il existe $\delta > 0$ tel que $]y - \delta, y + \delta[\subset f(I)$. Soit donc $y \in f(I)$ quelconque. Par définition, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Vu que I est ouvert, il existe $\tilde{\delta} > 0$ tel que $]x - \tilde{\delta}, x + \tilde{\delta}[\subset I$. Par monotonie stricte de f, on a alors $f(x - \tilde{\delta}) < f(x) = y < f(x + \tilde{\delta})$. Soit maintenant

$$\delta = \min\{y - f(x - \tilde{\delta}), f(x + \tilde{\delta}) - y\} > 0.$$

Montrons que $]y - \delta, y + \delta[\subset f(I)$. Soit donc $\tilde{y} \in]y - \delta, y + \delta[$ quelconque. Alors, on a

$$f(x - \tilde{\delta}) \leq y - \delta < \tilde{y} < y + \delta \leq f(x + \tilde{\delta}).$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $\tilde{x} \in]x - \tilde{\delta}, x + \tilde{\delta}[\subset I$ tel que $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$, ce qui montre que $\tilde{y} \in f(I)$ qui est le résultat voulu.

(*iii*) On montre que f prend son minimum et son maximum sur $I = [a, b]$. Le fait qu'alors

$$f(I) = \left[\min_{x \in I} f(x), \max_{x \in I} f(x)\right]$$

découle du point (*i*).

On sépare la démonstration en 4 étapes.

Étape 1 : On montre que $f(I)$ est minoré.

Supposons par l'absurde que $f(I)$ m'est pas minoré. Donc, pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $y_m \in f(I)$ tel que $y_m < m$. En particulier, si $m = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in f(I)$ tel que $y_n \leq -n$. De plus, par définition de $f(I)$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$. Vu que pour tout n, $x_n \in [a,b]$, la suite (x_n) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 3.33, page 86), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1} \subset (x_n)$ convergente. Notons $l = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \leq x_{n_k} \leq b$, on a nécessairement $l \in [a,b]$. Et, par continuité de f en l, on a

$$f(l) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} -n_k = -\infty,$$

ce qui est absurde.

Étape 2 : On montre que f prend son minimum sur $[a,b]$.

Soit $m = \inf f(I)$. Alors, par la caractérisation de l'infimum (voir théorème 1.11, page 36), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in f(I)$ tel que

$$m \leq y_\varepsilon \leq m + \varepsilon.$$

En particulier, choisissant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in f(I)$ tel que $m \leq y_n \leq m + \frac{1}{n}$. De plus, par définition de $f(I)$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$. Vu que pour tout n, $x_n \in [a,b]$, la suite (x_n) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 3.33, page 86), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1} \subset (x_n)$ convergente. Notons $l = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \leq x_{n_k} \leq b$, on a nécessairement $l \in [a,b]$. Et, par continuité de f en l, on a

$$m \leq f(l) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} m + \frac{1}{n_k} = m.$$

Donc, $m = f(l)$ et vu que $f(l) \in f(I)$, on a $m = \min_{x\in I} f(x)$.

Étape 3 : On montre que $f(I)$ est majoré.

Supposons par l'absurde que $f(I)$ m'est pas majoré. Donc, pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $y_m \in f(I)$ tel que $y_m > m$. En particulier, si $m = n$ avec $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in f(I)$ tel que $y_n > n$. De plus, par définition de $f(I)$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Vu que pour tout n, $x_n \in [a,b]$, la suite (x_n) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 3.33, page 86), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0} \subset (x_n)$ convergente. Notons $l = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \leq x_{n_k} \leq b$, on a nécessairement $l \in [a,b]$. Et, par continuité de f en l, on a

$$f(l) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \geq \lim_{k\to\infty} n_k = \infty,$$

ce qui est absurde.

Étape 4 : On montre que f prend son maximum sur $[a,b]$.

Soit $m = \sup f(I)$. Alors, par la caractérisation du suprémum (voir théorème 1.11, page 36), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in f(I)$ tel que

$$m \geq y_\varepsilon \geq m - \varepsilon.$$

En particulier, choisissant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in f(I)$ tel que $m \geq y_n \geq m - \frac{1}{n}$. De plus, par définition de $f(I)$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Vu que pour tout n, $x_n \in [a,b]$, la suite (x_n) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 3.33, page 86), il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0} \subset (x_n)$ convergente. Notons $l = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \leq x_{n_k} \leq b$, on a nécessairement $l \in [a,b]$. Et, par continuité de f en l, on a

$$m \geq f(l) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \geq \lim_{k\to\infty} m - \frac{1}{n_k} = m.$$

Donc, $m = f(l)$ et vu que $f(l) \in f(I)$, on a $m = \max_{x\in I} f(x)$.

Exemple 5.18. (i) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$. Alors,

$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

qui est un intervalle fermé.

(ii) Soit $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors,

$$f(]0,1[) =]1, +\infty[$$

qui est un intervalle ouvert. Remarquons que f est strictement monotone.

(iii) Soit $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors,

$$f(]-1,1[) = [0,1[$$

qui est un intervalle ni ouvert ni fermé.

(iv) Soit $f\colon]-2,2[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$. Alors,

$$f(]-2,2[) =]-6,6[$$

qui est un intervalle ouvert. Remarquons que f n'est pas strictement monotone.

(v) Soit $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors

$$f([-2,2]) = [0,4]$$

Le minimum de f est atteint en 0 : $f(0) = 0$. Le maximum de f est atteint en -2 et 2 : $f(-2) = f(2) = 4$.

(vi) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x)$. Alors,

$$f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Remarque 5.19.
Le théorème nous garantit l'existence d'un maximum et un minimum pour notre fonction, mais ne nous dit pas comment trouver le maximum et le minimum. On verra dans le chapitre suivant comment trouver le maximum et le minimum (voir section 7.1).

Proposition 5.20.
Soient $a < b$ et $f \in C^0([a,b])$ telle que $f(a) \leq a$ et $f(b) \geq b$. Alors, il existe $x \in [a,b]$ tel que

$$x = f(x).$$

Démonstration. Soit $g(x) = f(x) - x$. Alors, $g(a) = f(a) - a \leq 0$ et $g(b) = f(b) - b \geq 0$. En particulier, 0 est entre $g(a)$ et $g(b)$ et donc, par le théorème de la valeur intermédiaire (voir théorème 5.15, page 138), on a qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0$. Par définition de g ceci est équivalent à ce que $f(x) = x$. □

Chapitre 6

La dérivée

6.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 6.1 (Dérivée)**.**
Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Soit $x_0 \in D$ et supposons que f est définie au voisinage de x_0. On dit que f *est dérivable en* x_0 si la limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe.

On note cette limite $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ qu'on appelle la dérivée de f en x_0.

(ii) Supposons que D est ouvert. On dit que f *est dérivable* si pour tout $x_0 \in D$, f est dérivable en x_0. La *dérivée de* f est alors la fonction $f'\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Exemple 6.2. (i) Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\sum_{j=0}^{n-1} x^j x_0^{n-1-j}}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^j x_0^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} x_0^j x_0^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a que f est dérivable et pour tout x, $f'(x) = nx^{n-1}$.

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, en utilisant que

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = 1\cdot\cos\left(\frac{x_0+x_0}{2}\right) = \cos(x_0).\end{aligned}$$

Ce qui montre que f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$.

(*iii*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.
Regardons ce qu'il se passe en $x_0 = 0$. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Or,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Ainsi, limite à gauche et à droite ne coïncident pas et donc $|x|/x$ n'a pas de limite en 0 et donc f n'est pas dérivable en 0.

Proposition 6.3.
Soient $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0. Alors, f est continue en x_0.

Démonstration. On a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) = 0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0),$$

ce qui montre que f est continue en x_0. □

Proposition 6.4.
Soient $x_0 \in D, E \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ définies au voisinage x_0 et dérivables en x_0, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0, $f(D) \subset F \subset \mathbb{R}$ et $h : F \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $f(x_0)$ et dérivable en $f(x_0)$. Alors

(i) *αf est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.*

(ii) *$f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

(iii) *fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*

(iv) *si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

(v) *$h \circ f$ est dérivable en x_0 et $(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0))f'(x_0)$.*

(vi) *si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\varphi(x) = f(x)$, on a que φ est dérivable en x_0 et $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$.*

Démonstration. (*i*) On a, par la proposition 4.17, page 122 que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0).$$

(*ii*) On a, par la proposition 4.17, page 122 que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

(iii) On a, par les proposition 4.17, page 122 et 6.3, page 144 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} g(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &\quad + f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

(iv) On commence par montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

On a, par les proposition 4.17, page 122 et 6.3, page 144 que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = -\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\frac{1}{\lim_{x\to x_0} g(x)}\frac{1}{g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

En utilisant maintenant le point précédent,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.\end{aligned}$$

(v) On distingue deux cas.
Cas 1 : Il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\gamma, x_0+\gamma[\setminus\{x_0\}$, $f(x) \neq f(x_0)$. On a alors, par la proposition 4.24, page 128,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{h(f(x))-h(f(x_0))}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{h(f(x))-h(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{y\to f(x_0)}\frac{h(y)-h(f(x_0))}{y-f(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= h'(f(x_0))f'(x_0),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu dans ce cas.
Cas 2 : Pour tout $\gamma > 0$, il existe $x \in]x_0-\gamma, x_0+\gamma[\setminus\{x_0\}$ tel que $f(x) = f(x_0)$.
On sépare ce cas en deux étapes.
Étape 1 : On montre que $f'(x_0) = 0$.
Par hypothèse, pour $n \geq 1$, $\gamma = \frac{1}{n}$, il existe $a_n \in \left]x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right[\setminus\{x_0\}$ tel que $f(a_n) = f(x_0)$. On a alors, $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ et pour tout n, $a_n \neq x_0$. Donc, par le théorème 4.13, page 119 on a

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0} = 0,$$

qui est le résultat voulu.
Étape 2 : On montre que $h\circ f$ est dérivable en x_0 et que $(h\circ f)'(x_0) = h'(f(x_0))f'(x_0) = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{|h'(f(x_0))|^2}{4}+\varepsilon} - \frac{|h'(f(x_0))|}{2}.$$

Alors, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $y \in]f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1[\backslash\{f(x_0)\}$,

$$\left|\frac{h(y) - h(f(x_0))}{y - f(x_0)} - h'(f(x_0))\right| \leq \varepsilon'.$$

De plus, par la proposition 6.3, page 144, f est continue en x_0 et donc, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\delta_1}{2}$.
Aussi, par l'étape 1, il existe $\delta_3 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3[\backslash\{x_0\}$,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \varepsilon'$$

Soit $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\} > 0$ et $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ quelconque. Alors, si $f(x) = f(x_0)$, on a

$$\left|\frac{h(f(x)) - h(f(x_0))}{x - x_0}\right| = 0 \leq \varepsilon.$$

Si $f(x) \neq f(x_0)$, alors, $f(x) \in]f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1[\backslash\{f(x_0)\}$ et $x \in]x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3[\backslash\{x_0\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\frac{h(f(x)) - h(f(x_0))}{x - x_0}\right| &= \left|\frac{h(f(x)) - h(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \\ &\leq \underbrace{\left|\frac{h(f(x)) - h(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} - h'(f(x_0))\right|}_{\leq \varepsilon'} \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|}_{\leq \varepsilon'} \\ &\quad + |h'(f(x_0))| \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|}_{\leq \varepsilon'} \\ &\leq (\varepsilon')^2 + |h'(f(x_0))|\varepsilon' = \varepsilon,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(vi) Par la proposition 4.17, page 122, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

□

Proposition 6.5.
Soient $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $a > 0$.
On regroupe dans un tableau les dérivées des fonctions usuelles. Le tableau a trois colonnes, D, f et f'. On a que f est dérivable sur D et sa dérivée y vaut f'.

D	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	c	0
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$]-1, 1[$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$]-1, 1[$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$]0, +\infty[$	$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$]0, +\infty[$	x^a	ax^{a-1}

Démonstration. (*i*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = c$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

(*ii*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x_0^{n-1-k} = n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

(*iii*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}}}_{\to 1} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos(x_0). \end{aligned}$$

(*iv*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x)$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{-2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\to 1} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \\
&= -\sin(x_0).
\end{aligned}$$

(*v*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Alors, par la proposition 6.4, page 144,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(*vi*) Soit on utilise la définition de l'exponentielle sous forme de série entière. Soit donc $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Par le théorème 8.21, page 199, on a

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k!} \frac{1}{(k+1)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

(*vii*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Alors, par la proposition 6.4, page 144, on a

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

(*viii*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Alors, par la proposition 6.4, page 144, on a

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

(*ix*) On utilise le théorème 6.17, page 155. Si $f\colon]-1,1[\to]-\pi,\pi[$ est définie par $f(x) = \arcsin(x)$ et $g\colon]-\pi,\pi[\to]-1,1[$ est définie par $g(x) = \sin(x)$, alors,

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

De plus, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Et vu que $\arcsin(x) \in]-\pi,\pi[$, on a $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$. On déduit donc

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

On conclut donc

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(x) On utilise le théorème 6.17, page 155. Si $f\colon]-1,1[\to]0,2\pi[$ est définie par $f(x) = \arccos(x)$ et $g\colon]0,2\pi[\to]-1,1[$ est définie par $g(x) = \cos(x)$, alors,

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$$

De plus, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\sin(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$. Et vu que $\arccos(x) \in]0,2\pi[$, on a $\sin(\arccos(x)) \geq 0$. On déduit donc

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

On conclut donc

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(xi) On utilise le théorème 6.17, page 155. Si $f\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est définie par $f(x) = \arctan(x)$ et $g\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = \tan(x)$, alors,

$$\begin{aligned} f'(x) =& (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \cos^2(\arctan(x)) \\ =& \frac{\cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x)}} \\ =& \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(xii) On utilise le théorème 6.17, page 155. Si $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \log(x)$ et $g\colon \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est définie par $g(x) = e^x$), alors,

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x}.$$

($xiii$) Soit $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^a = e^{a\log(x)}$. Alors, par la proposition 6.4, page 144, on a

$$f'(x) = e^{a\log(x)}\frac{a}{x} = ax^a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

$\square$

Définition 6.6 (Dérivée à gauche, à droite)**.**
Soient $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$.

(i) Supposons que f est définie à gauche de x_0. On dit que f *est dérivable à gauche de* x_0 si la limite

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe.
On note alors cette limite $f'_g(x_0)$.

(ii) supposons que f est définie à droite de x_0. On dit que f *est dérivable à droite de* x_0 si la limite

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe.
On note alors cette limite $f'_d(x_0)$.

(*iii*) Supposons que $D = [a, b]$ avec $a < b$. On dit que f *est dérivable* si pour tout $x_0 \in]a, b[$, f est dérivable en x_0, f est dérivable à droite de a et à gauche de b.

(*iv*) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que f *est dérivable* si pour tout $x_0 \in]a, +\infty[$, f est dérivable en x_0 et f est dérivable à droite de a.

(*v*) Supposons que $D =]-\infty, b]$. On dit que f *est dérivable* si pour tout $x_0 \in]-\infty, b[$, f est dérivable en x_0 et f est dérivable à gauche de b.

Remarque 6.7.
On a que f est dérivable en x_0 si et seulement si f et dérivable à gauche et à droite et

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Exemple 6.8. (*i*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On a déjà vu que f n'est pas dérivable en 0. Montrons que f est dérivable à gauche et à droite de 0. On a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Donc,

$$f'_g(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad f'_d(0) = 1.$$

(*ii*) Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Montrons que f n'est pas dérivable à droite de -1 et à gauche de 1.
On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 0}{x + 1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1 + x}\sqrt{1 - x}}{1 + x} \\ &= \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}} = +\infty,\end{aligned}$$

et donc la limite

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

n'existe pas et donc f n'est pas dérivable à droite de -1.
Un raisonnement similaire montre que f n'est pas dérivable à gauche de 1.

Exemple 6.9 (Dérivées de fonctions définies par étapes)**.** (*i*) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, $a \in \mathbb{R}$ et la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq a \\ g(x) & \text{si } x < a \end{cases}$$

Supposons que $f(a) = g(a)$ et $f'(a) = g'(a)$. Montrons que h est dérivable.
Pour $x > a$ on a par la proposition 6.4, page 144 que h est dérivable sur x et $h'(x) = f'(x)$.
Pour $x < a$ on a par la proposition 6.4, page 144 que h est dérivable sur x et $h'(x) = g'(x)$.

Il reste donc à montrer que h est dérivable en a. On a

$$\lim_{x\to a^-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{g(x)-f(a)}{x-a}\overset{f(a)=g(a)}{=}\lim_{x\to a^-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'_g(a)=g'(a).$$

De plus,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)=f'(a).$$

Ainsi,

$$h'_g(a)=g'(a)=f'(a)=h'_d(a)$$

et on conclut que h est dérivable en a et $h'(a)=f'(a)=g'(a)$.

(ii) $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables, $a,c\in\mathbb{R}$ et la fonction $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x>a\\ c & \text{si } x=a\\ g(x) & \text{si } x<a\end{cases}$$

Supposons que $f(a)=g(a)=c$ et $f'(a)=g'(a)$. Montrons que h est dérivable.
Pour $x>a$ on a par la proposition 6.4, page 144 que h est dérivable sur x et $h'(x)=f'(x)$.
Pour $x<a$ on a par la proposition 6.4, page 144 que h est dérivable sur x et $h'(x)=g'(x)$.
Il reste donc à montrer que h est dérivable en a. On a

$$\lim_{x\to a^-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{g(x)-c}{x-a}\overset{c=g(a)}{=}\lim_{x\to a^-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'_g(a)=g'(a).$$

De plus,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-c}{x-a}\overset{c=f(a)}{=}\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)=f'(a).$$

Ainsi,

$$h'_g(a)=g'(a)=f'(a)=h'_d(a)$$

et on conclut que h est dérivable en a et $h'(a)=f'(a)=g'(a)$.
Remarquons que malgré le fait que $h(a)=c$ et que la dérivée d'une constante est 0, on n'a pas nécessairement $h'(a)=0$. En effet, par la proposition 6.4, page 144 pour que les dérivées de deux fonctions coïncident il faut que ces fonctions soient égales sur un petit intervalle autour du point considéré, ici a. Vu que h et la fonction constante c ne coïncident qu'en un point, leurs dérivées ne coïncident pas nécessairement.

(iii) Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ des paramètres et la fonction $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$h(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+\gamma & \text{si } x>0\\ \alpha+\beta+\gamma & \text{si } x=0\\ \alpha+\cos(\beta x)+\sin(\gamma x) & \text{si } x<0\end{cases}$$

Déterminons les paramètres pour lesquels h est dérivable. Comme vu dans les exemples précédents, h est dérivable pour tout $x\neq 0$. Pour que h soit dérivable en 0, on a besoin que les trois équations

$$\begin{cases} \gamma=\alpha+\beta+\gamma & (f(a)=c)\\ \alpha+1=\alpha+\beta+\gamma & (g(a)=c)\\ \beta=\gamma & (f'(a)=g'(a))\end{cases}$$

soient vérifiées.
En résolvant ce système, on trouve $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=\gamma=\frac{1}{2}$, qui sont les paramètres pour lesquels h est dérivable.

6.2 Continuité de la dérivée et dérivées d'ordre supérieur

Définition 6.10 (Continument dérivable, $C^k(D)$, dérivée d'ordre n)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $f \colon D \to \mathbb{R}$ dérivable.

(i) Si $f' \colon D \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f *est continument dérivable*. On définit *l'ensemble des fonctions continument dérivables*

$$C^1(D) = \Big\{ g \in C^0(D) \ : \ g \text{ est continument dérivable} \Big\}.$$

(ii) Si f et f' sont continument dérivables, on dit que f *est deux fois continument dérivable*. On définit

$$\begin{aligned} C^2(D) &= \Big\{ g \in C^1(D) \ : \ g \text{ est deux fois continument dérivable} \Big\} \\ &= \Big\{ g \in C^1(D) \ : \ g' \text{ est continument dérivable} \Big\}. \end{aligned}$$

(iii) On continue ainsi, si la dérivée d'ordre k de f (qu'on note $f^{(k)}$) est continument dérivable pour tout $1 \leq k \leq n-1$, on dit que f est *n fois continument dérivable*. On note la dérivée de $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$, qu'on appelle la *dérivée d'ordre n de f* et on définit

$$\begin{aligned} C^n(D) &= \Big\{ g \in C^{n-1}(D) \ : \ g \text{ est } n \text{ fois continument dérivable} \Big\} \\ &= \Big\{ g \in C^{n-1}(D) \ : \ g^{(n-1)} \text{ est continument dérivable} \Big\}. \end{aligned}$$

(iv) On définit

$$C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(D).$$

Si $f \in C^\infty(D)$, on dit que f *est infiniment dérivable*.

Exemple 6.11. (i) Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x|x|$. Alors, $f'(x) = 2|x|$ qui est continue. Ainsi, $f \in C^1(\mathbb{R})$. Néanmoins, f' n'est pas dérivable car $|x|$ n'est pas dérivable. Ainsi, $f \notin C^2(\mathbb{R})$.
Plus généralement, si $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = x^k|x|$, on a que

$$g \in C^k(\mathbb{R}) \backslash C^{k+1}(\mathbb{R}).$$

(ii) Soit $f \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x|x|$. Alors, $f'(x) = 2|x|$ qui est continue. De plus, f' est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

qui est à son tour dérivable et $f^{(3)}(x) = 0$ pour tout x. En continuant ainsi, on a pour tout $k \geq 3$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f^{(k)}(x) = 0$ et donc

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\}).$$

Théorème 6.12.
Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $x_0 \in D$, $f \colon D \to \mathbb{R}$ continue. Supposons que

(i) f est dérivable sur $D\backslash\{x_0\}$, c'est-à-dire, pour tout $x \in D\backslash\{x_0\}$, f est dérivable en x.

(ii) la limite

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)$$

existe.

Alors, f est dérivable en x_0 et

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Démonstration. Attention la démonstratin de ce résultat utilise le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159) qui est énoncé plus tard.
Soit $l = \lim_{x \to x_0} f'(x)$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$, $|f'(x) - l| \leq \varepsilon$.
Soit donc $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ quelconque. Par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159), il existe c_x strictement entre x et x_0 tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x).$$

De plus, vu que $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ et c_x est stritement entre x et x_0, nécessairement, on a $c_x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$. Ainsi,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| = |f'(c_x) - l| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $f'(x_0) = l$. □

Remarque 6.13.
On a vu dans la remarque 5.4, page 133 que lorsqu'une fonction est discontinue en x_0, on a deux possibilités : La limite en x_0 de f n'existe pas ou elle existe mais est différent de $f(x_0)$. Ce théorème nous dit que si on suppose que f est la dérivée d'une fonction, la seule possibilité pour que f soit discontinue en x_0 est que la limite en x_0 de f n'existe pas.

Exemple 6.14.
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que f est dérivable. Pour $x \neq 0$, f est dérivable en x comme addition, multiplication et composition de fonctions dérivables. De plus,

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Remarquons que $\lim_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.
Néanmoins,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

Donc, f est dérivable en 0. Ainsi, f est dérivable mais pas continument dérivable.

6.3 Existence, continuité et dérivabilité de la fonction réciproque

Proposition 6.15.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration. Le fait que si f est strictement monotone, f est injective est immédiat. Supposons donc que f est injective et montrons qu'elle est strictement monotone en 2 étapes.
Étape 1 : On montre le résultat sous l'hypothèse supplémentaire que $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Par injectivité de f, on a que $f(a) \neq f(b)$. On distingue deux cas :
Cas 1 : $f(a) < f(b)$.
Montrons par l'absurde que f est strictement croissante.
Suposons donc que f n'est pas strictement croissante. Il existe alors $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$. Vu que $x_1 < x_2 \leq b$, on a par injectivité de f que $f(x_1) \neq f(b)$. On distingue rapidement deux cas.
Si $f(x_1) > f(b)$, on a $f(a) < f(b) < f(x_1)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire (voir théorème 5.15, page 138), il existe donc $c \in [a, x_1]$ tel que $f(c) = f(b)$. Vu que $c \leq x_1 < b$, on a $c \neq b$ et $f(c) = f(b)$ ce qui est une contradiction avec le fait que f est injective.
Si $f(x_1) < f(b)$, on a $f(x_2) \leq f(x_1) < f(b)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire (voir théorème 5.15, page 138), il existe $c \in [x_2, b]$ tel que $f(c) = f(x_1)$. Vu que $c \geq x_2 > x_1$, on a $c \neq x_1$ et $f(c) = f(x_1)$ ce qui est une contradiction avec le fait que f est injective.
Cas 2 : $f(a) > f(b)$.
Montrons par l'absurde que f est strictement décroissante.
Supposons donc que f n'est pas strictement décroissante. Il existe alors $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \leq f(x_2)$. Vu que $x_2 > x_1 \geq a$, on a par injectivité de f que $f(x_2) \neq f(a)$. On distingue rapidement deux cas.
Si $f(x_2) > f(a)$, on a $f(x_2) > f(a) > f(b)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire (voir théorème 5.15, page 138), il existe donc $c \in [x_2, b]$ tel que $f(c) = f(a)$. Vu que $c \geq x_2 > x_1 \geq a$, on a $c \neq a$ et $f(c) = f(a)$ ce qui est une contradiction avec le fait que f est injective.
Si $f(x_2) < f(a)$, on a $f(x_1) \leq f(x_2) < f(a)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire (voir théorème 5.15, page 138), il existe donc $c \in [a, x_1]$ tel que $f(c) = f(x_2)$. Vu que $c \leq x_1 < x_2$, on a $c \neq x_2$ et $f(c) = f(x_2)$ ce qui est une contradiction avec le fait que f est injective.
Étape 2 : On conclut.
Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone. Par définition, il existe $x_1, x_2 \in I$ tel que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$ et il existe $y_1, y_2 \in I$ tel que $f(y_1) \leq f(y_2)$. Soit $a = \min\{x_1, y_1\}$ et $b = \max\{x_2, y_2\}$. Alors, f n'est pas strictement monotone sur $[a, b]$ ce qui entre en contradiction avec l'étape 1. □

Théorème 6.16.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f\colon I \to f(I)$ une fonction continue et bijective.
Alors, la fonction réciproque $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue.

Démonstration. Par la proposition 6.15, page 154, on a que f est strictement monotone. On distingue deux cas.
Cas 1 : f est strictement croissante.

Soit $y_0 \in f(I)$ quelconque. On sépare la démonstration en trois étapes.
Étape 1 : On montre que si f^{-1} est définie à droite de x_0, f^{-1} est continue à droite de y_0. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que f^{-1} est définie à droite de y_0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $]y_0, y_0 + \delta_1] \subset f(I)$. Par croissance stricte, on a que $x_0 := f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + \delta_1)$. Définissons $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, f^{-1}(y_0+\delta_1) - f^{-1}(y_0)\} > 0$. Par croissance stricte, on a à nouveau

$$y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon).$$

Soit donc $\delta = f(x_0+\varepsilon') - y_0 > 0$ et $y \in]y_0, y_0+\delta[$ quelconque. Alors, par monotonie stricte de f^{-1},

$$\begin{aligned}|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| =& f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_0 + \delta) - f^{-1}(y_0)\\ =& f^{-1}(y_0 + f(x_0 + \varepsilon') - y_0) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon')) - x_0\\ =& x_0 + \varepsilon' - x_0 = \varepsilon' \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 2 : On montre que si f^{-1} est définie à gauche de y_0, f^{-1} est continue à gauche de y_0. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Vu que f^{-1} est définie à gauche de y_0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $[y_0-\delta_1, y_0[\subset f(I)$. Par croissance stricte, on a que $x_0 := f^{-1}(y_0) > f^{-1}(y_0-\delta_1)$. Définissons $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y_0 - \delta_1)\} > 0$. Par croissance stricte, on a à nouveau

$$y_0 = f(x_0) > f(x_0 - \varepsilon').$$

Soit donc $\delta = y_0 - f(x_0 - \varepsilon') > 0$ et $y \in]y_0 - \delta, y_0[$ quelconque. Alors, par monotonie stricte de f^{-1},

$$\begin{aligned}|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| =& f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y_0 - \delta)\\ =& f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y_0 + f(x_0 - \varepsilon') - y_0) = x_0 - f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon'))\\ =& x_0 - x_0 + \varepsilon' = \varepsilon' \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 3 : On conclut pour ce cas.
Par le théorème 5.17, page 140, $f(I)$ est un intervalle. Ainsi, pour tout $y_0 \in f(I)$, soit f^{-1} est défini au voisinage de y_0, soit f^{-1} est définie à droite de y_0, soit f^{-1} est définie à gauche de y_0. Vu que dans le cas où f^{-1} est définie au voisinage de y_0, la continuité de f^{-1} est équivalente à la continuité à droite et la continuité à gauche, par nos étapes 1 et 2, on a la continuité de f^{-1} en y_0.
Cas 2 : f est strictement décroissante.
Soit $J = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -x \in I\}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(-x)$. Alors, J est un intervalle (J est l'image de I par la fonction $x \mapsto -x$ qui est continue), $g(J) = f(I)$, g est continue, strictement croissante, inversible et $g^{-1}(y) = -f^{-1}(y)$. Par le cas 1, g^{-1} est continue. Vu que $f^{-1}(y) = -g^{-1}(y)$, f^{-1} est continue. □

Théorème 6.17.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$ et $f\colon I \to f(I)$ une fonction continue, bijective et telle que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$.
Alors, $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Remarquons que vu que $f'(x_0) \neq 0$, par la proposition 3.17, page 70 on a

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ainsi, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tous $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus\{x_0\}$,

$$\left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| \leq \varepsilon. \tag{6.17.1}$$

Par le théorème 6.16, page 154, f^{-1} est continue en y_0. donc, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$,

$$|x_0 - f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)| \leq \frac{\delta_2}{2} < \delta_2.$$

Ainsi, si $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\setminus\{y_0\}$, alors, par injectivité, $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ et donc $f^{-1}(y) \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus\{y_0\}$. Ainsi,

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| \overset{(6.17.1)}{\leq} \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu. □

Remarque 6.18.
Dans le cas où f et f^{-1} sont toutes deux dérivables, on peut retrouver la formule dans le théorème ci-dessus en utilisant la proposition 6.4, page 144. En effet, si on sait que

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{et } f(f^{-1}(y)),$$

en dérivant ces deux identités, on obtient

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = 1 \qquad \text{et } f'(f^{-1}(y))\left(f^{-1}\right)'(y) = 1.$$

On obtient ainsi les formules

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} \qquad \text{et } \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

et la deuxième formule est celle qui est établie dans le théorème.
Remarquons de plus que dans ce cas, on a nécessairement que f' et $(f^{-1})'$ ne s'annulent jamais.

Théorème 6.19.
Soit $f : I \to f(I)$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors, f est bijective, f^{-1} est dérivable et pour tout $y \in f(I)$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration. Attention la démonstration de ce théorème utilise des résultats qui seront démontrés plus tard.
On sépare la démonstration en 3 étapes.
Étape 1 : On montre le résultat suivant : Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors, pour tout $a, b \in I$, avec $a < b$ et pour tout y strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = y$.

Soit $a, b \in I$ et y comme ci-dessus. On définit les fonctions $\varphi_a, \varphi_b \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

$$\varphi_b(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

On a $\varphi_a, \varphi_b \in C^0([a,b])$ et donc, par le théorème 5.17, page 140, $\varphi_a([a,b])$ et $\varphi_b([a,b])$ sont des intervalles. De plus,

$$\varphi_a(b) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \varphi_b(a),$$

et donc $\varphi_a([a,b]) \cap \varphi_b([a,b]) \supset \left\{\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right\} \neq \emptyset$. Ainsi, $\varphi_a([a,b]) \cup \varphi_b([a,b])$ est un intervalle. Vu que $f'(a), f'(b) \in \varphi_a([a,b]) \cup \varphi_b([a,b])$ et que y est compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, on a $y \in \varphi_a([a,b]) \cup \varphi_b([a,b])$. On distingue deux cas, pas nécessairement exclusif.
Cas 1 : $y \in \varphi_a([a,b])$.
Vu que $y \neq f'(a)$, il existe $x \in]a,b]$ tel que $y = \varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. De plus, f étant continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$, on a par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159) qu'il existe $c \in]a,x[\subset]a,b[$ tel que

$$y = \varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c),$$

qui est le résultat voulu.
Cas 2 : $y \in \varphi_b([a,b])$.
Vu que $y \neq f'(b)$, il existe $x \in [a,b[$ tel que $y = \varphi_b(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$. De plus, f étant continue sur $[x,b]$ et dérivable sur $]x,b[$, on a par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159) qu'il existe $c \in]x,b[\subset]a,b[$ tel que

$$y = \varphi_b(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(c),$$

qui est le résultat voulu.
Étape 2 : On montre que soit pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, soit pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_1, x_2 \in I$ tel que $f'(x_1) > 0$ et $f'(x_2) < 0$. Alors, par l'étape 1, il existe c entre x_1 et x_2 tel que $f'(c) = 0$, ce qui est absurde.
Étape 2 : On conclut.
Par l'étape 2 et la proposition 6.30, page 164, on a que f est strictement monotone. Ainsi, f est injective, et donc bijective sur son image. Le reste découle du théorème 6.17, page 155. □

6.4 Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis et la règle de Bernoulli-L'Hospital

Proposition 6.20.
Soit $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ et $f \colon D \to \mathbb{R}$ telle que f est définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0 et prend son maximum ou son minimum en x_0.
Alors,

$$f'(x_0) = 0.$$

Démonstration. On distinge les cas, selon si f prend son maximum ou son minimum en x_0.
Cas 1 : f prend son minimum en x_0, c'est-à-dire que pour tout $x \in D$, $f(x) \geq f(x_0)$.
Remarquons que

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{x - x_0}}_{\leq 0} \leq 0$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{x - x_0}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Vu que f est dérivable en x_0, on a

$$0 \leq f'_d(x_0) = f'(x_0) = f'_g(x_0) \leq 0,$$

et donc

$$f'(x_0) = 0,$$

qui est le résultat voulu.
Cas 2 : f prend son maximum en x_0, c'est-à-dire que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq f(x_0)$.
Remarquons que

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\leq 0} \underbrace{\frac{1}{x - x_0}}_{\leq 0} \geq 0$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\leq 0} \underbrace{\frac{1}{x - x_0}}_{\geq 0} \leq 0.$$

Vu que f est dérivable en x_0, on a

$$0 \leq f'_g(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0,$$

et donc

$$f'(x_0) = 0,$$

qui est le résultat voulu. □

Théorème 6.21 (Théorème de Rolle)**.**
Soient $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que

(i) f est dérivable sur $]a, b[$.

(ii) $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0$$

Démonstration. Vu que f est continue sur un intervalle fermé borné, elle prend son maximum et son minimum sur $[a, b]$. Notons

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

On distingue trois cas.
Cas 1 : $m = M = f(a) = f(b)$.
Dans ce cas, on a pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = m = M = f(a) = f(b)$. Donc f est constante et pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$. N'importe quel élément $c \in]a,b[$ donne le résultat du théorème.
Cas 2 : $M > f(a) = f(b)$.
Il existe $c \in [a,b]$ qui réalise le maximum de f, c'est-à-dire, $f(c) = M$. Vu que $f(c) > f(a) = f(b)$, on a $c \neq a$ et $c \neq b$. Donc, $c \in]a,b[$. Par la proposition 6.20,

$$f'(c) = 0,$$

qui est le résultat voulu.
Cas 3 : $m < f(a) = f(b)$.
Il existe $c \in [a,b]$ qui réalise le minimum de f, c'est-à-dire, $f(c) = m$. Vu que $f(c) < f(a) = f(b)$, on a $c \neq a$ et $c \neq b$. Donc, $c \in]a,b[$. Par la proposition 6.20,

$$f'(c) = 0,$$

qui est le résultat voulu.

Théorème 6.22 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soit $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$$

Démonstration. Soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Alors, g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus,

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0 \\ g(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de Rolle (théorème 6.21), il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$g'(c) = 0.$$

Or,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ainsi, $g'(c) = 0$ est équivalent à

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Remarque 6.23 (Reformulation du théorème des accroissements finis)**.**
Une autre façon d'écrire le résultat du théorème des accroissements finis est la suivante. Soit f comme dans le théorème des accroissements finis. Alors, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\boxed{f'(a+\theta(b-a)) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$$

En effet, on passe d'une formulation à l'autre à l'aide des formules

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \qquad c = a+\theta(b-a),$$

on a alors $c \in]a,b[$ si et seulement si $\theta \in]0,1[$.
L'avantage de cette formulation est qu'on peut l'écrire même si $b < a$. Ainsi, si on ne sait pas si $a < b$ ou $b < a$, on peut utiliser cette formulation sans avoir à distinguer les deux cas.

Théorème 6.24 (Théorème des accroissements finis généralisé)**.**
Soient $a < b$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et tel que $g(b) \neq g(a)$ et pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.
Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Démonstration. Soit $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Alors, h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a

$$\begin{aligned} h(a) =& f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(a)-g(a)) = 0 \\ h(b) =& f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de Rolle (voir théorème 6.21, page 158), il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$h'(c) = 0.$$

Or,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x).$$

Ainsi, $h'(c) = 0$ est équivalent à

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$$

en réarrangeant les termes on déduit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

qui est le résultat voulu. □

Théorème 6.25 (Règle de Bernoulli-L'Hospital)**.**
Soient $a < x_0 < b$*,* $f, g\colon]a, b[\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ *dérivables et* $\alpha \in \{0, -\infty, +\infty\}$*.*
Supposons que pour tout $x \in]a, b[\setminus\{x_0\}$*,* $g(x) \neq 0$ *et* $g'(x) \neq 0$ *et*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha$$

(i) Si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

alors,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.}$$

(ii) Si $f, g\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ *sont dérivables,* $\alpha = 0$ *et* $g'(x_0) \neq 0$*, alors*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.}$$

Démonstration. (i) *Étape 1* : On montre que

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

On distingue deux cas.
Cas 1 : $\alpha = 0$.
Vu que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0$, les fonctions $\tilde{f}, \tilde{g}\colon [x_0, b[\to \mathbb{R}$ définies par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

sont continues sur $[x_0, b[$ et dérivables sur $]x_0, b[$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, on a

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in]x_0, x_0 + \delta[$. Alors,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} - l\right| = \left|\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} - l\right|$$

Remarquons que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont continues sur $[x_0, x]$, dérivables sur $]x_0, x[$, $\tilde{g}(x) \neq \tilde{g}(x_0)$ et pour tout $t \in]x_0, x[$, $\tilde{g}'(t) \neq 0$. Ainsi, par le théorème des accroissements finis généralisé (voir théorème 6.24, page 160) il existe $\bar{t}_x \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{\tilde{f}'(\bar{t}_x)}{\tilde{g}(\bar{t}_x)} = \frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)}.$$

Pour finir, vu que $\bar{t}_x \in]x_0, x[\subset]x_0, x_0 + \delta[$, on conclut

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)} - l\right| \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.
Cas 2 : $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$\varepsilon' = \sqrt{\left(\frac{|l|+1}{2}\right)^2 + \varepsilon} - \frac{|l|+1}{2} > 0.$$

Alors, par définition de $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0, x_0+\delta_1[$,

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| \leq \varepsilon'.$$

De plus, vu que $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = \alpha \in \{-\infty, +\infty\}$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $\delta_2 < \delta_1$ et pour tout $x \in]x_0, x_0+\delta_2[$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $f(x) \neq f(x_0+\delta_1)$ et $g(x) \neq g(x_0+\delta_1)$.
Enfin, remarquons que

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{1 - \frac{g(x_0+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta_1)}{f(x)}} = 1,$$

Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta < \delta_2$ et pour tout $x \in]x_0, x_0+\delta[$,

$$\left|\frac{1 - \frac{g(x_0+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta_1)}{f(x)}} - 1\right| \leq \varepsilon'.$$

Pour finir, soit $x \in]x_0, x_0+\delta[$ quelconque. Remarquons que f et g sont continues sur $[x, x_0+\delta_1]$, dérivables sur $]x, x_0+\delta_1[$, $g(x) \neq g(x_0+\delta_1)$ et pour tout $t \in]x, x_0+\delta_1[$, $g'(x) \neq 0$. Ainsi, par le théorème des accroissements finis généralisé (voir théorème 6.24, page 160), il existe $\bar{t}_x \in]x, x_0+\delta_1[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0+\delta_1)}{g(x) - g(x_0+\delta_1)} = \frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)}.$$

De plus, vu que $\bar{t}_x \in]x, x_0+\delta_1[\subset]x_0, x_0+\delta_1[$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| &= \left|\frac{f(x) - f(x_0+\delta_1)}{g(x) - g(x_0+\delta_1)} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \frac{g(x) - g(x_0+\delta_1)}{f(x) - f(x_0+\delta_1)} - l\right| \\
&= \left|\frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)} \frac{1 - \frac{g(x_0+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta_1)}{f(x)}} - l\right| \\
&\leq \left|\frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)} \frac{1 - \frac{g(x_0+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta_1)}{f(x)}} - \frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)}\right| + \underbrace{\left|\frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)} - l\right|}_{\leq \varepsilon'} \\
&= \left|\frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)}\right| \underbrace{\left|\frac{1 - \frac{g(x_0+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta_1)}{f(x)}} - 1\right|}_{\leq \varepsilon'} + \varepsilon' \\
&\leq \left(\left|\frac{f'(\bar{t}_x)}{g'(\bar{t}_x)} - l\right| + |l|\right) \varepsilon' + \varepsilon' \\
&\leq (\varepsilon' + |l|)\varepsilon' + \varepsilon' \\
&= (\varepsilon')^2 + (|l|+1)\varepsilon' = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.
Étape 2 : On montre que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Soient $\tilde{f}, \tilde{g} \colon]x_0, 2x_0 - a[\to \mathbb{R}$ définies par

$$\tilde{f}(x) = f(2x_0 - x) \qquad \text{et} \qquad \tilde{g}(x) = g(2x_0 - x).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0^+} \tilde{f}(x) &= \lim_{x \to x_0^-} f(x) \\
\lim_{x \to x_0^+} \tilde{g}(x) &= \lim_{x \to x_0^-} g(x) \\
\lim_{x \to x_0^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} \\
\tilde{f}'(x) &= -\, f'(2x_0 - x) \\
\tilde{g}'(x) &= -\, g'(2x_0 - x),
\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ainsi, par l'étape 1,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = l,$$

donc,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Vu que f et g sont dérivables en x_0, elles y sont continues, et donc,

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{et } g(x_0) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

qui est le résultat voulu.

□

Remarque 6.26. (i) Le résultat est aussi vrai si on prend des limites latérales ou des limites à $+\infty$ ou $-\infty$.

(ii) Attention, il existe des fonctions pour lesquelles $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe mais $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas.

Exemple 6.27. (i) On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

(*ii*) On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x}\overset{\text{B.H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(*iii*) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x^{14}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{14}}{e^x}\overset{\text{B.H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{14x^{13}}{e^x}\overset{\text{B.H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{14\cdot 13x^{12}}{e^x}\\ \overset{\text{B.H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{14\cdot 13\cdot 12x^{11}}{e^x}\overset{\text{B.H.}}{=}\dots\overset{\text{B.H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{14!x}{e^x}\overset{\text{B.H.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{14!}{e^x}=0.\end{aligned}$$

Il est intéressant de noter dans cet exemple, qu'a priori, nos premières applications de la règle de Bernoulli-l'Hospital ne sont pas rigoureuses. En effet, dans le théorème, on a besoin que la limite des dérivées existe pour avoir le résultat. Ici, avant d'arriver à la fin du calcul, on n'est pas sûr que la limite des dérivées existe. La seule application légale est en fait la dernière, car on sait que la dernière limite existe.
Néanmoins, une fois qu'on sait que la limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{14!}{e^x}=0$, on sait par Bernoulli l'hospital que la limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{14!x}{e^x}=0$, rendant ainsi notre avant dernière application de la règle de Bernoulli l'Hospital rigoureuse. On peut ainsi remonter pour récupérer a posteriori que toutes nos applications de la règle de Bernoulli l'Hospital sont rigoureuses.

6.5 Applications du théorème des accroissements finis à l'étude de fonctions

Proposition 6.28.
Soit I un intervalle ouvert et $f\colon I\to\mathbb{R}$ continue et telle que pour tout $x\in I$, $f'(x)=0$. Alors, f est constante.

Démonstration. Soit $x,y\in I$ quelconques. On montre que $f(x)=f(y)$.
Par le théorèmes des accroissements finis, et sa reformulation (voir remarque 6.23, page 160), il existe $\theta\in]0,1[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(x+\theta(y-x))=0,$$

ce qui montre que $f(x)=f(y)$ et termine la démonstration. □

Exemple 6.29.
Voyons un exemple qui montre que le fait que le domaine est un intervalle est important. Soit $f\colon]-2,-1[\cup]1,2[\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in]-2,-1[\\ 1 & \text{si } x\in]1,2[\end{cases}$$

On a que pour tout $x\in]-2,-1[\cup]1,2[$, $f'(x)=0$, mais f n'est pas constante. En fait elle est constante sur chaque intervalle qui constitue son domaine, mais en changeant l'intervalle, la constante peut changer.

Proposition 6.30.
Soit I un intervalle ouvert et $f\colon I\to\mathbb{R}$ dérivable. Alors,

(i) f est croissante si et seulement si pour tout $x\in I$, $f'(x)\geq 0$.

(ii) *si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.*

(iii) *f est décroissante si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.*

(iv) *si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.*

Démonstration. (i) Commençons par supposer que f est croissante et montrons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

Pour tout $h > 0$, on a $f(x+h) \geq f(x)$ et donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Et, pour tout $h < 0$, on a $f(x+h) \leq f(x)$ et donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Ainsi, pour tout $h \neq 0$, on a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ et on conclut

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

Passons à la réciproque. Supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et montrons que f est croissante.

Soient donc $x, y \in I$, $x < y$. Alors, par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159), il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(y-x)}_{>0} \geq 0,$$

qui est le résultat voulu.

(ii) Soient $x, y \in I$, $x < y$. Alors, par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159), il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \underbrace{(y-x)}_{>0} > 0,$$

qui est le résultat voulu.

(iii) Commençons par supposer que f est décroissante et montrons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Pour tout $h > 0$, on a $f(x+h) \leq f(x)$ et donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$. Et, pour tout $h < 0$, on a $f(x+h) \geq f(x)$ et donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$. Ainsi, pour tout $h \neq 0$, on a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ et on conclut

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$$

Passons à la réciproque. Supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et montrons que f est décroissante.

Soient donc $x, y \in I$, $x < y$. Alors, par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159), il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{\leq 0} \underbrace{(y-x)}_{>0} \leq 0,$$

qui est le résultat voulu.

(*iv*) Soient $x, y \in I$, $x < y$. Alors, par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 159), il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{<0}\underbrace{(y - x)}_{>0} < 0,$$

qui est le résultat voulu. □

Exemple 6.31.
Voyons un exemple qui montre qu'il existe des fonctions strictement croissantes pour lesquelles on n'a pas $f'(x) > 0$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Commençons par montrer que f est strictement croissante.
Soient $x < y$. Alors,

$$f(y) - f(x) = y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2).$$

En étudiant le polynôme $x^2 + yx + y^2$ on peut voir qu'il est toujours strictement positif.
Ainsi,

$$f(y) - f(x) = \underbrace{(y - x)}_{>0}\underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{>0} > 0,$$

qui montre que f est strictement croissante.
De plus, $f'(x) = 3x^2$ qui s'annule en 0.

Chapitre 7

L'étude de fonctions

7.1 Extrema et détermination de l'image

Définition 7.1 (extremum, minimum et maximum).
Soient $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

(*i*) *f admet un minimum local en x_0* si

$$\boxed{\exists \delta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D,\ \text{tel que } |x - x_0| < \delta,\ f(x) \geq f(x_0).}$$

(*ii*) *f admet un maximum local en x_0* si

$$\boxed{\exists \delta > 0,\ \text{tel que } \forall x \in D,\ \text{tel que } |x - x_0| < \delta,\ f(x) \leq f(x_0).}$$

(*iii*) *f admet un extrémum local en x_0* si f admet un minimum local ou un maximum local en x_0.

(*iv*) *f admet un minimum (global) en x_0* si

$$\boxed{\forall x \in D,\ f(x) \geq f(x_0).}$$

(*v*) *f admet un maximum (global) en x_0* si

$$\boxed{\forall x \in D,\ f(x) \leq f(x_0).}$$

(*vi*) *f admet un extrémum (global) en x_0* si f admet un minimum ou un maximum en x_0.

Remarque 7.2.
On a que f admet un minimum global est équivalent à ce que f prend son minimum, et f admet um maximum global est équivalent à ce que f prend son maximum.

Définition 7.3 (Point stationnaire).
Soit $x_0 \in D$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0. On dit que x_0 *est un point stationnaire de f* si

$$f'(x_0) = 0.$$

Proposition 7.4 (extremum local condition nécessaire).
Soit $x_0 \in D$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0.
Alors, si f admet un extremum local en x_0, x_0 est un point stationnaire de f.

Démonstration. La preuve est très similaire à la preuve de la proposition 6.20, page 158.

Exemple 7.5.
Voyons un exemple de comment utiliser cette proposition pour déterminer l'image d'une fonction.
Soit $f\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = e^x \cos(x).$$
La fonction est continue sur un intervalle fermé borné, donc par le théorème 5.17, page 140, on a que f prend son minimum et son maximum sur $[0, \pi/2]$ et son image est
$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right].$$
Si x_0 est le minimum ou le maximum de f, on a deux possibilités : Soit f est définie au voisinage de x_0 et donc $f'(x_0) = 0$ soit f n'est pas défini au voisinage de x_0 et donc $x_0 = 0$ ou $x_0 = \pi/2$.
Déterminons donc les points stationnaires de f :
$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)),$$
qui s'annule en $x = \frac{\pi}{4}$ uniquement. Ainsi, parmis les valeurs
$$f(0) = 1 \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
il y a le minimum de f et le maximum de f. Ainsi, la plus petite valeur, 0, est le minimum et la plus grande valeur $e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ est le maximum et on a donc
$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0, e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Proposition 7.6 (Extremum local condition suffisante)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ un nombre pair, I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f \in C^n(I)$ telle que $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors,

(i) si $f^{(n)}(x_0) > 0$, f admet un minimum local en x_0.

(ii) si $f^{(n)}(x_0) < 0$, f admet un maximum local en x_0.

Démonstration. Attention dans la démonstration on utilise le théorème de Taylor qui est énoncé et montré dans le chapitre suivant (voir théorème 8.3, page 184).
On sépare la démonstration en 2 cas de respectivement 2 et 3 étapes.
Cas 1 : $f^{(n)}(x_0) > 0$.
Étape 1 : On montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $f^{(n)}(x) > 0$.
Par hypothèse, $f^{(n)}$ est continue en x_0. Donc pour $\varepsilon = \frac{f^{(n)}(x_0)}{2} > 0$, on a qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon = \frac{f^{(n)}(x_0)}{2}.$$
Ainsi, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a
$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) =& f^{(n)}(x_0) + f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) = |f^{(n)}(x_0)| + f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) \\ \geq& |f^{(n)}(x_0)| - |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \geq |f^{(n)}(x_0)| - \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{2} = \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{2} > 0, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 2 : On montre que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et pour tout $\theta \in]0,1[$, on a

$$x_0 + \theta(x - x_0) \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

On a

$$|\theta(x - x_0)| = \underbrace{|\theta|}_{\leq 1} \underbrace{|x - x_0|}_{<\delta} < \delta.$$

Ainsi, $\theta(x - x_0) \in] - \delta, \delta[$, et donc $x_0 + \theta(x - x_0) \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 3 : On conclut pour le cas 1.
On a par la formule de Taylor que pour tout $x \in I$, il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n$$

Vu que n est pair, on a toujours $(x - x_0)^n \geq 0$. De plus, si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a par l'étape 2 que $x_0 + \theta_x(x - x_0) \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et donc, $f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0)) > 0$. Donc,

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}}_{\geq 0} \underbrace{(x - x_0)^n}_{\geq 0} \geq f(x_0),$$

ce qui montre que f admet un minimum local en x_0
Cas 2 : $f^{(n)}(x_0) < 0$.
Étape 1 : On montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $f^{(n)}(x) < 0$.
Par hypothèse, $f^{(n)}$ est continue en x_0. Donc pour $\varepsilon = \frac{|f^{(n)}|(x_0)}{2} > 0$, on a qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon = \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) =& f^{(n)}(x_0) + f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) = -|f^{(n)}(x_0)| + f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) \\ \leq& - |f^{(n)}(x_0)| + |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq -|f^{(n)}(x_0)| + \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{2} \\ =& - \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{2} < 0, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu dans cette étape.
Étape 3 : On conclut pour le cas 2.
On a par la formule de Taylor que pour tout $x \in I$, il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n$$

Vu que n est pair, on a toujours $(x - x_0)^n \geq 0$. De plus, si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a par l'étape 2 du cas 1 que $x_0 + \theta_x(x - x_0) \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et donc, $f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0)) < 0$. Donc,

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}}_{\leq 0} \underbrace{(x - x_0)^n}_{\geq 0} \leq f(x_0),$$

ce qui montre que f admet un maximum local en x_0

□

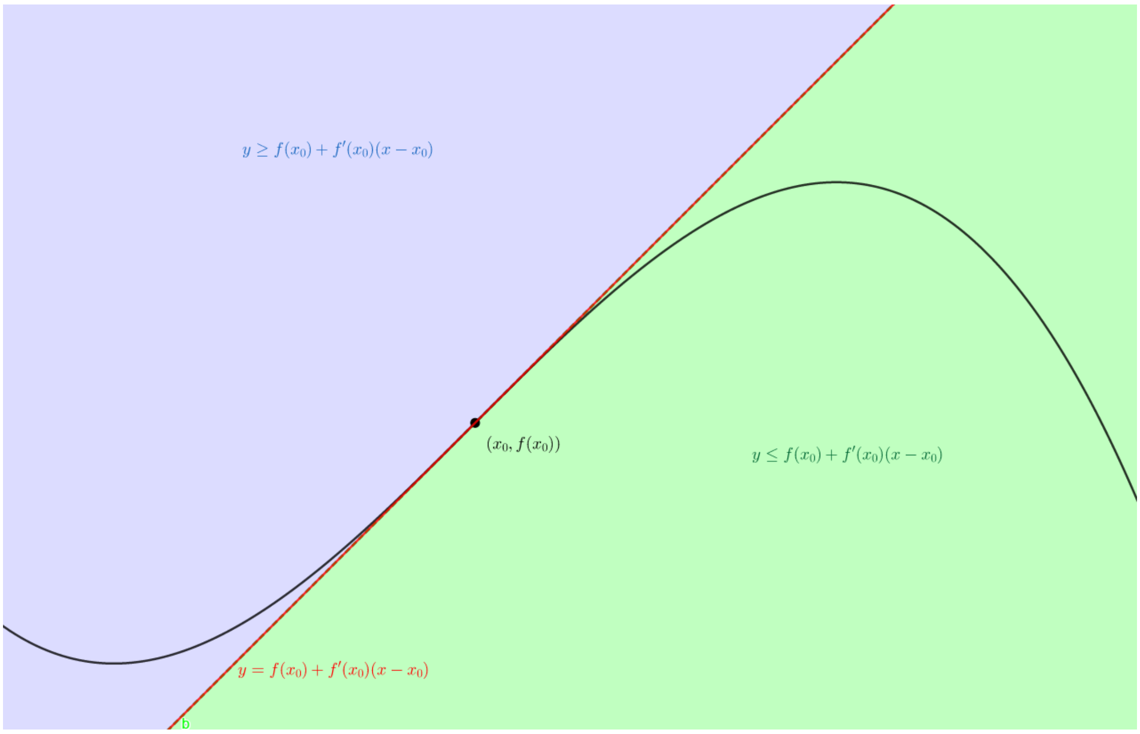
7.2 Points d'inflexion

Définition 7.7 (Point d'inflexion)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ défini au voisinage de x_0 et dérivable en x_0. On dit que x_0 *est un point d'inflexion de* f si une des deux propriétés suivantes a lieu :

(i) il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ et pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

(ii) il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ et pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Remarque 7.8.
la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est l'équation de la tangente au graphe de f en x_0. Un point d'inflexion est donc un point où la tangente traverse le graphe



Exemple 7.9. (i) Soit $f(x) = x^3 + x$, $x_0 = 0$. Alors, $f'(x_0) = 1$. De plus, pour tout $x < 0$,

$$\underbrace{x^3}_{<0} + x < x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

et pour $x > 0$,

$$\underbrace{x^3}_{>0} + x > x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

ce qui montre que x_0 est un point d'inflexion de f.

(ii) Soit $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$. Alors, $f'(x_0) = 0$. De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$x^2 > 0 = f(0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

ce qui montre que x_0 n'est pas un point d'inflexion de f.

Proposition 7.10 (Point d'inflexion condition nécessaire)**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $x_0 \in I$ un point d'inflexion de f. Alors,

$$f''(x_0) = 0.$$

Démonstration. On sépare la démonstration en 2 étapes.
Étape 1 : On montre que

$$\lim_{x\to x_0} 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = f''(x_0).$$

On utilise la règle de Bernoulli-l'Hospital. On a

$$\lim_{x\to x_0} 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} 2\frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = f''(x_0),$$

qui est le résultat voulu.
Étape 2 : On conclut.
Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ et pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Alors, pour $x \in]x_0 - \delta, x_0[$,

$$2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = 2\underbrace{\left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\right)}_{\leq 0}\underbrace{\frac{1}{(x - x_0)^2}}_{\geq 0} \leq 0$$

et pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$,

$$2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = 2\underbrace{\left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\right)}_{\geq 0}\underbrace{\frac{1}{(x - x_0)^2}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{x\to x_0^-} 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} &= f''(x_0) \\ = \lim_{x\to x_0^+} 2\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} &\leq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $f''(x_0) = 0$. La démonstration dans le cas où il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ et pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est en tout point similaire. □

Proposition 7.11.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}$ un nombre impair, I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f \in C^n(I)$ tel que $f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors, f admet un point d'inflexion en x_0.

Démonstration. Attention dans la démonstration on utilise le théorème de Taylor qui est énoncé et montré dans le chapitre suivant (voir théorème 8.3, page 184).
On sépare la démonstration en 2 cas.
Cas 1 : $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Par le même argument que dans le cas 1, étape 1 de la démonstration de la proposition 7.6, page 168, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

$$f^{(n)}(x) > 0.$$

Par le théorème de Taylor, on a que pour tout $x \in I$, il existe $\theta_x \in]0, 1[$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n.$$

Par le même argument que dans le cas 1, étape 2 de la démonstration de la proposition 7.6, page 168, on a pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x_0 + \theta_x(x - x_0) \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
On conclut donc que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[$,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}}_{>0}\underbrace{(x - x_0)^n}_{<0} \\ <& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

et pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}}_{>0}\underbrace{(x - x_0)^n}_{>0} \\ >& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.
Cas 2 : $f^{(n)}(x_0) < 0$.
Par le même argument que dans le cas 2, étape 1 de la démonstration de la proposition 7.6, page 168, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

$$f^{(n)}(x) < 0.$$

Par le théorème de Taylor, on a que pour tout $x \in I$, il existe $\theta_x \in]0, 1[$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n.$$

Par le même argument que dans le cas 1, étape 2 de la démonstration de la proposition 7.6, page 168, on a pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x_0 + \theta_x(x - x_0) \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
On conclut donc que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[$,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}}_{<0}\underbrace{(x - x_0)^n}_{<0} \\ >& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \end{aligned}$$

et pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta[$,

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{n!}}_{<0}\underbrace{(x - x_0)^n}_{>0} \\ <& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. $\square$

Exemple 7.12.
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}.$$

Cherchons les points d'inflexion de f. On a

$$\begin{aligned} f'(x) =& 6\frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2} \\ f''(x) =& 24x\frac{2x^2-3}{(2x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Pour trouver les points d'inflexion de f, on résout $f''(x) = 0$, dont les solutions sont 0 et $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.
On a

$$f'''(x) = -72\frac{4x^4-12x^2+1}{(2x^2+1)^4}.$$

On a $f'''\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 147'456 \neq 0$, $f'''(0) = -72 \neq 0$, $f'''\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 147'456 \neq 0$, donc ces points sont des points d'inflexion de f.

7.3 Convexité

Définition 7.13 (Fonction convexe, fonctions concave)**.**
Soit I un intervalle et $f \colon I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) On dit que f est *convexe* si pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

(ii) On dit que f est *concave* si pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$$

Remarque 7.14. (i) On a que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

(ii) Pour $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty = x + t(y-x)$ représente un point entre x et y, de la même façon que $(1-t)f(x) + tf(y) = f(x) + t(f(y) - f(x))$ représente un point entre $f(x)$ et $f(y)$. Ainsi, on peut comprendre la convexité graphiquement : Quel que soit deux points sur le graphe de f, la courbe entre ces deux points est toujours sous le segment qui relie directement les deux point.

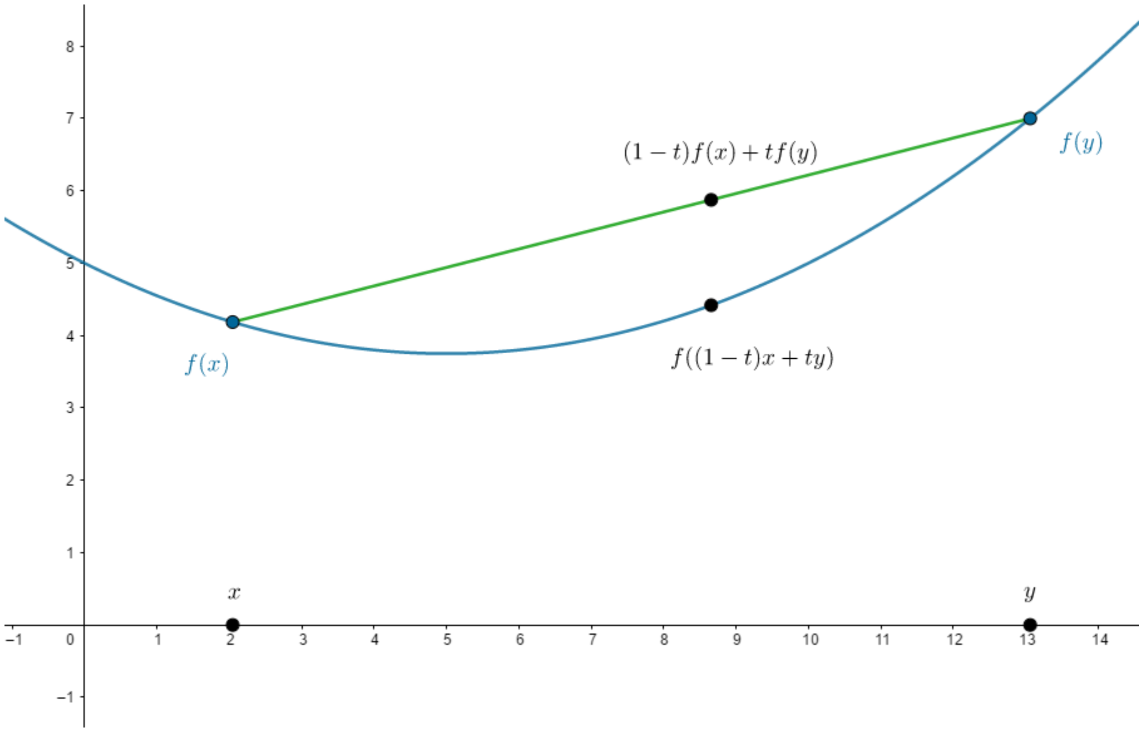


FIGURE 7.1 – Représentation graphique de la convexité

La même chose est vrai pour la concavité, mais le graphe est au dessus du segment.

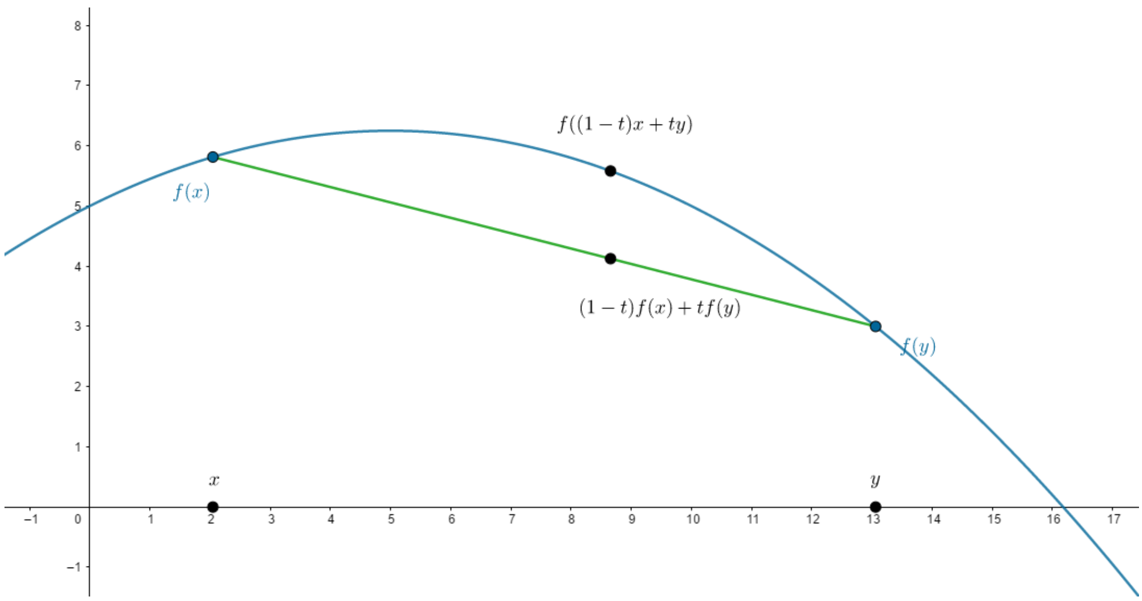


FIGURE 7.2 – Représentation graphique de la concavité

Théorème 7.15 (Caractérisation des fonctions convexes)**.**
Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe.

(ii) Pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Si de plus I est ouvert et f est dérivable sur I, alors ces propriétés sont aussi équivalentes à

(iii) f' est croissante.

(iv) Pour tous $x, y \in I$,

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y).$$

Si de plus, f est deux fois dérivable, ces propriétés sont équivalentes à

(v) Pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

Démonstration. On montre $(i) \Leftrightarrow (ii)$, puis on suppose que f est dérivable et on montre $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$ et pour finir, on suppose que f est deux fois dérivable et on montre $(iii) \Leftrightarrow (v)$.
$(i) \Rightarrow (ii)$:
Soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. Alors, $\lambda := \frac{y-x}{z-x} \in]0,1[$. De plus, on a alors

$$1-\lambda = \frac{z-x}{z-x} - \frac{y-x}{z-x} = \frac{z-y}{z-x}.$$

et

$$\lambda z + (1-\lambda)x = x + \lambda(z-x) = x + y - x = y.$$

Ainsi, par hypothèse,

$$f(y) = f(\lambda z + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(x).$$

Donc

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{\lambda f(z) + (1-\lambda)f(x) - f(x)}{y-x} = \frac{\lambda}{y-x}(f(z)-f(x)) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

et

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq \frac{f(z) - \lambda f(z) - (1-\lambda)f(x)}{z-y} = \frac{1-\lambda}{z-y}(f(z)-f(x)) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

ce qui nous donne le résultat.
$(ii) \Rightarrow (i)$:
Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in]0,1[$. Quitte à échanger les notations, on peut supposer que $x \leq y$. Remarquons qu'alors,

$$x \leq x + \underbrace{\lambda}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{\geq 0} = \lambda y + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0}\underbrace{x}_{\leq y} \leq \lambda y + (1-\lambda)y = y.$$

Ainsi, par hypothèse, on a

$$\frac{f(\lambda y + (1-\lambda)x) - f(x)}{\lambda y + (1-\lambda)x - x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y) - f(\lambda y + (1-\lambda)x)}{y - (\lambda y + (1-\lambda)x)}.$$

En particulier, en ne gardant que le premier et le troisième terme, on a

$$\frac{1}{\lambda}\frac{f(\lambda y + (1-\lambda)x) - f(x)}{y-x} \leq \frac{1}{1-\lambda}\frac{f(y) - f(\lambda y + (1-\lambda)x)}{y-x},$$

ce qui est équivalent à

$$(1-\lambda)\left(f(\lambda y+(1-\lambda)x)-f(x)\right)\leq \lambda\left(f(y)-f(\lambda y+(1-\lambda)x)\right).$$

En réarrangeant les termes, on trouve

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x)\leq \lambda f(y)+(1-\lambda)f(x),$$

qui est le résultat voulu.
Supposons maintenant que I est ouvert et que f est dérivable.
$(ii)\Rightarrow(iii)$:
Soient $x<y$ quelconques et h tel que $0<h<y-x$. Alors, on a

$$x<x+h<x+y-x=y<y+h$$

Ainsi, par hypothèse,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}\overset{x<x+h<y}{\leq}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\overset{x<y<y+h}{\leq}\frac{f(y+h)-f(y)}{y+h-y}.$$

Donc,

$$f'(x)=f'_d(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}\leq \lim_{h\to 0}\frac{f(y+h)-f(y)}{y+h-y}=f'_d(y)=f'(y),$$

ce qui montre la croissance de f'.
$(iii)\Rightarrow(iv)$:
Soient $x,y\in I$. Si $x=y$, le résultat est trivial, supposons donc que $x\neq y$. On a que f est continue et dérivable sur l'intervalle fermé dont les bornes sont x et y. Ainsi, par le théorème des accroissements finis, il existe c entre x et y tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c).$$

Donc,

$$f(x)=f(y)+f'(c)(x-y).$$

On distingue rapidement deux cas : Si $x<y$, alors, $x<c<y$ et par croissance de f', on a $f'(c)\leq f'(y)$. Vu que $x-y\leq 0$, on en déduit

$$f(x)=f(y)+f'(c)(x-y)\geq f'(y)(x-y),$$

qui est le résultat voulu dans ce cas. Si $y<x$, alors, $y<c<x$ et par croissance de f', on a $f'(c)\geq f'(y)$. Vu que $x-y\geq 0$, on déduit

$$f(x)=f(y)+f'(c)(x-y)\geq f'(y)(x-y),$$

qui est le résultat voulu dans ce cas et termine la démonstration de cette partie.
$(iv)\Rightarrow(i)$:
Soient $x,y\in I$ et $\lambda\in]0,1[$. Alors par hypothèse,

$$\begin{aligned}f(x)\geq& f(\lambda y+(1-\lambda)x)+f'(\lambda y+(1-\lambda)x)(x-\lambda y-(1-\lambda)x)\\=&f(\lambda y+(1-\lambda)x)+f'(\lambda y+(1-\lambda)x)\lambda(x-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(y)\geq& f(\lambda y+(1-\lambda)x)+f'(\lambda y+(1-\lambda)x)(y-\lambda y-(1-\lambda)x)\\=&f(\lambda y+(1-\lambda)x)+f'(\lambda y+(1-\lambda)x)(1-\lambda)(y-x),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) \geq & (\lambda + (1-\lambda)) f(\lambda y + (1-\lambda)x) \\ & + f'(\lambda y + (1-\lambda)x)(x-y) \underbrace{(\lambda(1-\lambda) - \lambda(1-\lambda))}_{=0} \\ = & f(\lambda y + (1-\lambda)x),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Pour finir, supposons que f est deux fois dérivable. L'équivalence $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ est alors une application de la proposition 6.30, page 164 à la fonction f'.

□

7.4 Asymptotes

Définition 7.16 (Asymptote)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$, et $f\colon D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

(i) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est tel que f est définie à droite de x_0 et $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ou f est définie à gauche de x_0 et $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, on dit que f admet une *asymptote verticale* d'équation $x = x_0$.

(ii) Si f est définie au voisinage de $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou f est définie au voisinage de $-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, on dit que f admet une *asymptote horizontale* d'équation $y = l$.

(iii) Si f est définie au voisinage de $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax - b = 0$ ou f est définie au voisinage de $-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax - b = 0$, on dit que f admet une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$.

Remarque 7.17. (i) Une asymptote horizontale est un cas particulier d'asymptote oblique avec $a = 0$.

(ii) On cherche les asymptotes verticales en s'intéressant aux points x_0 qui sont au bord du domaine de f.

(iii) On cherche les asymptotes obliques en calculant $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Cette limite, si elle existe et est non nulle est a. Ensuite, on calcule la limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$. Cette limite, si elle existe est b. Il est possible que la première limite existe, mais la deuxième n'existe pas et dans ce cas, la fonction n'admet pas d'asymptote oblique.

Exemple 7.18. (i) Soit $f\colon \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$.
On commence par chercher les asymptotes verticales. Le seul point qui est au bord du domaine de f est $x_0 = 1$. De plus, $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} + 2 = +\infty$ et donc, f a une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Remarquons ici que $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ qui nous donne aussi une asymptote verticale de même équation.
Passons aux asymptotes obliques. On a $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-x} + \frac{2}{x} = 0$. Ces limites étant nulles, f n'admet pas d'asymptote oblique.
Pour finir, les asymptotes horizontales. On a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ et donc, f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x}$.

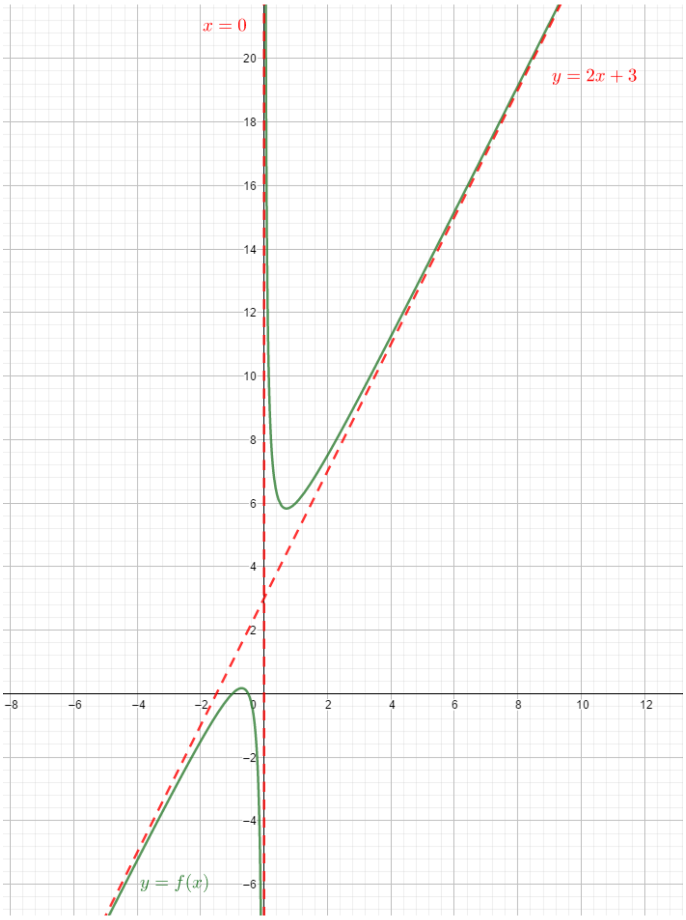
On commence par chercher les asymptotes verticales. Le seul point qui est au bord du domaine est $x_0 = 0$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+3x+1}{x} = +\infty$ et donc, f a une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Remarquons ici que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ qui nous donne aussi une asymptote verticale de même équation.

Passons aux asymptotes obliques. On a $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2} = 2$. De plus,

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2+3x+1}{x} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

et donc, f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 3$.

Pour finir, les asymptotes horizontales. On a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et donc f n'admet pas d'asymptote horizontale.



(iii) Soit $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f)x) = x + \sqrt{x}$.

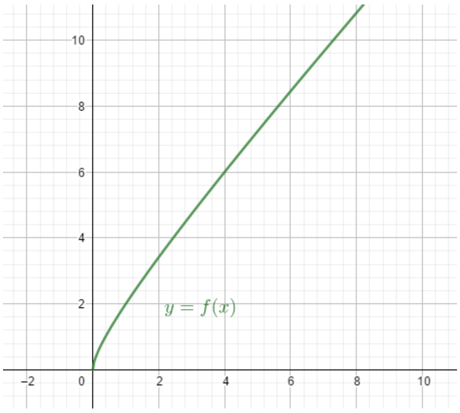
On commence par chercher les asymptotes verticales. Le seul point qui est au bord du domaine est $x_0 = 1$. De plus, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x + \sqrt{x} = 2$ et donc f n'admet pas d'asymptote verticale.

Passons aux asymptotes obliques.On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+<infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

et donc f n'admet pas d'asymptote oblique.

Pour finir, les asymptotes horizontales. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et donc f n'admet pas d'asymptote horizontale.



(iv) Soit $f\colon \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{2x-3}}$.

On commence par chercher les asymptotes verticales. Le seul point qui est au bord du domaine est $x_0 = \frac{3}{2}$. On a

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}^+} e^{-\frac{1}{2x-3}} = 0,$$

car $\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} -\frac{1}{2x-3} = -\infty$ et $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$. De plus,

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}^-} e^{-\frac{1}{2x-3}} = +\infty,$$

car $\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} -\frac{1}{2x-3} = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$. On déduit donc que f admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{3}{2}$.

Passons aux asymptotes obliques. On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2x-3}}}{x} = 0.$$

Vu que ces limites sont nulles, f n'admet pas d'asymptote oblique.

Pour finir, les asymptotes horizontales. On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{2x-3}} = e^0 = 1,$$

et donc f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

$x = \frac{3}{2}$
$y = f(x)$
$y = 1$

Chapitre 8

Développements limités et séries entières

8.1 Développements limités

Théorème 8.1.
Soit $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ *et* $f \colon D \to \mathbb{R}$ *définie au voisinage de* x_0.
Alors f *est dérivable en* x_0 *si et seulement si il existe* $m, h \in \mathbb{R}$ *et une fonction* $r \colon D \to \mathbb{R}$ *tel que* $r(x_0) = 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

et

$$f(x) = h + m(x - x_0) + r(x).$$

De plus, on a alors $h = f(x_0)$ *et* $m = f'(x_0)$.

Démonstration. On commence par supposer que f est dérivable en x_0 et on montre l'existence de m, h et r.
On définit

$$\begin{aligned} h =& f(x_0), \\ m =& f'(x_0), \\ r(x) =& f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

Alors,

$$h + m(x - x_0) + r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f(x).$$

De plus,

$$\begin{aligned} r(x_0) =& f(x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0 \\ \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} =& \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

donc, m, h et r ont toutes les propriétés voulues.
Passons à la réciproque, on suppose que h, m et r comme dans l'énoncé existent.
On a

$$h = h + m(x_0 - x_0) + r(x_0) = f(x_0).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)+m(x-x_0)+r(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} m+\frac{r(x)}{x-x_0}=m,\end{aligned}$$

d'où f est dérivable et $f'(x_0)=m$. □

Théorème 8.2.
Soit I un intervalle ouvert, $x_0\in I$ et f n fois dérivables sur I. Alors, si

$$\boxed{a_0=f(x_0)\qquad \textit{et pour } 1\le k\le n,\ a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},}$$

il existe $r\colon I\to\mathbb{R}$ tel que $r(x_0)=0$,

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+r(x)}$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}=0.}$$

Démonstration. Soit $r\colon I\to\mathbb{R}$ définie par

$$r(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k.$$

On a alors par définition que

$$\begin{aligned}r(x_0)=&f(x_0)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x_0-x_0)^k=0\\ f(x)=&\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+r(x).\end{aligned}$$

On montre que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

en deux étapes.
Étape 1 : On montre par récurrence que pour tout $0\le m\le n$,

$$r^{(m)}(x)=f^{(m)}(x)-\sum_{k=m}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m}.$$

Ancrage : Pour $m=0$, on a par définition,

$$r^{(0)}(x)=r(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Pas de récurrence : Supposons que pour $0 \leq m \leq n-1$,

$$\begin{aligned} r^{(m)}(x) =& f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m} \\ =& f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x_0) - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m} \end{aligned}$$

Alors, en dérivant cette égalité,

$$\begin{aligned} r^{(m+1)}(x) =& f^{(m+1)}(x) - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(k-m)(x-x_0)^{k-m-1} \\ =& f^{(m+1)}(x) - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-(m+1))!}(x-x_0)^{k-(m+1)}, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 2 : On conclut en utilisant la règle de Bernoulli-l'Hospital.
Par l'étape 1, on a pour tout $0 \leq m \leq n$,

$$r^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - f^{(m)}(x_0) - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!} 0 = 0.$$

Ainsi, en appliquant la règle de Bernoulli-l'Hosptital (voir théorème 6.25, page 161 ; on applique le point (i) $n-1$ fois et le point (ii) une fois), on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

qui est le résultat voulu. □

Théorème 8.3 (Formule de Taylor)**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$, $n+1$ fois dérivable. Alors, pour tout $x \in I$, il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_x(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $x > x_0$. Définissons $P_n\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} P_n(x) =& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ g(t) =& f(t) - P_n(t) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $0 \leq m \leq n$,

$$P_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0)$$

et donc

$$g^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - P_n^{(m)}(x_0) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} 0 = 0.$$

De plus,
$$g(x) = 0$$
On montre maintenant le résultat en deux étapes.
Étape 1 : On montre que pour $m = 1, ..., n+1$, il existe $c_m \in]x_0, x[$ tel que
$$g^{(m)}(c_m) = 0.$$
On construit les c_m par récurrence :
Pour $m = 1$, on utilise le théorème de Rolle (voir théorème 6.21, page 158) qui nous assure qu'il existe $c_1 \in]x_0, x[$ tel que
$$g'(c_1) = 0.$$
Si pour $0 \leq m \leq n$ c_m est défini, on a $g^{(m)}(x_0) = 0$ et $g^{(m)}(c_m) = 0$. Donc, par le théorème de Rolle, il existe $c_{m+1} \in]x_0, c_m[\subset]x_0, x[$ tel que
$$g^{(m+1)}(c_{m+1}) = 0.$$
Étape 2 : On conclut.
Par l'étape 1, on a $c_{n+1} \in]x_0, x[$ tel que
$$g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0.$$
Or,
$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x - x_0)^{n+1}}(n+1)!.$$
Ainsi,
$$f^{(n+1)}(c_{n+1}) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x - x_0)^{n+1}}(n+1)! = 0$$
qui est équivalent à
$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$
En posant $\theta_x = \frac{c_{n+1} - x_0}{x - x_0} \in]0, 1[$, on a
$$x_0 + \theta_x(x - x_0) = c_{n+1},$$
et donc on conclut
$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_x(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$
qui est le résultat voulu.
La démonstration dans le cas où $x < x_0$ est similaire. □

Notation 8.4 ($o(|x - x_0|^n)$, $O(|x - x_0|)^n)$**.)**
Soient $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0.

(*i*) On écrit
$$f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^n)$$
si il existe $r \colon D \to \mathbb{R}$ tel que $r(x_0) = 0$ et
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0}$$
et on a
$$f(x) = g(x) + r(x).$$

(*ii*) On écrit
$$f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^n)$$
si il existe $r\colon D \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et $C > 0$ tel que $r(x_0) = 0$ et pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
$$\left|\frac{r(x)}{|x - x_0|^n}\right| \leq C$$
et on a
$$f(x) = g(x) + r(x).$$

Remarque 8.5. (*i*) On introduit cette notation essentiellement pour que les calculs (qu'on verra plus loin) soient plus rapides à écrire. Écrire
$$f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^n)$$
veut dire f égal g plus une fonction dont l'expression exacte ne m'intéresse pas mais dont je connais une propriété : si je la divise par $(x - x_0)^n$ et que je prend la limite quand x tend vers x_0, j'obtiens 0.

(*ii*) Une façon de montrer que
$$f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^n)$$
est de vérifier que $f(x_0) = g(x_0)$ et
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$
tandis qu'une façon de montrer que
$$f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^n)$$
est de vérifier qu'il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tel que
$$\left|\frac{f(x) - g(x)}{|x - x_0|^n}\right| \leq C$$

(*iii*) On a
$$\begin{gathered} f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^{n+1}) \\ \Downarrow \\ f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^n) \\ \Downarrow \\ f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^n). \end{gathered}$$

Définition 8.6 (Développement limité)**.**
Soit $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0. Un *développement limité d'ordre n autour de x_0 de f* est la donnée de $n+1$ nombres réels $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n).$$

Remarque 8.7. (*i*) Un développement limité d'ordre n consiste à approximer une fonction par un polynôme de degré n et un reste (le petit o) qui converge vers 0 plus rapidement que $(x - x_0)^n$.

(*ii*) Pas toutes les fonctions admettent un développement limité d'ordre n.

(*iii*) Le théorème 8.2, page 183 assure que si f est n fois dérivable et $x_0 \in I$, f admet un développement limité d'ordre n autour de x_0 et nous donne une formule pour calculer les coefficients a_k.

(*iv*) Le développement limité est très utile pour gagner du temps dans le calcul de limites lorsqu'on a des compositions de fonctions.

(*v*) La formule de Taylor (théorème 8.3, page 184) nous donne un outil pour estimer l'erreur qu'on commet en approximant f par le polynôme. En effet, si $f \in C^{n+1}(I)$, on a, pour tout $x \in I$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leq \max_{y \in [x_0,x]} \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(*vi*) plus généralement en ingénierie, le développement limité est très utile pour avoir des approximations de fonctions faciles à calculer à l'aide d'un ordinateur.

(*vii*) On a trois façons équivalentes d'écrire un développement limité d'ordre n de f :

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n) && \\
&f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + r(x) && \text{où } r(x_0) = 0 \text{ et } \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \\
&f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + R(x)(x-x_0)^n && \text{où } \lim_{x \to x_0} R(x) = 0.
\end{aligned}$$

Proposition 8.8.
Le développement limité est unique, c'est-à-dire si $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n \in \mathbb{R}$ *sont tels que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n) \qquad \textit{et} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n),$$

alors, on a pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$a_k = b_k.$$

Démonstration. Soient r_1, r_2 tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + r_1(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + r_2(x)$$

et pour $i = 1, 2$, $r_i(x_0) = 0$ et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_i(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

On montre le résultat par récurrence.
Ancrage : On a $a_0 = f(0) = b_0$.
Pas de récurrence : Supposons que pour $0 \leq j \leq k \leq n-1$,

$$a_j = b_j,$$

et montrons que

$$a_{k+1} = b_{k+1}.$$

On a

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{j=0}^{k}a_j(x-x_0)^j}{(x-x_0)^{k+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sum_{j=k+1}^{n}a_j(x-x_0)^j+r_1(x)}{(x-x_0)^{k+1}}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\sum_{j=k+1}^{n}a_j(x-x_0)^{j-k-1}+\frac{r_1(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^{n-(k+1)}=a_{k+1}.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence et en utilisant un calcul similaire à ci-dessus,

$$a_{k+1}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{j=0}^{k}a_j(x-x_0)^j}{(x-x_0)^{k+1}}\overset{\text{H.R.}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{j=0}^{k}b_j(x-x_0)^j}{(x-x_0)^{k+1}}=b_{k+1},$$

ce qui montre le résultat. □

Exemple 8.9 (Développements limités à connaître)**.**
Ci dessous, les développements limités de fonctions usuelles autour de $x_0=0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x}&=1+x+x^2+x^3+...+x^n+o(|x|^n)\\
\frac{1}{1+x}&=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^nx^n+o(|x|^n)\\
e^x&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...+\frac{x^n}{n!}+o(|x|^n)\\
\log(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(|x|^n)\\
\sin(x)&=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(|x|^{2m}) && \text{si } n=2m\\
&=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^{m}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+o(|x|^{2m+1}) && \text{si } n=2m+1\\
\cos(x)&=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(|x|^{2m}) && \text{si } n=2m\\
&=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^{m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(|x|^{2m+1}) && \text{si } n=2m+1.
\end{aligned}$$

Voyons comment on a trouvé certains de ces exemples.

(i) Commençons par l'exponentielle. Si $f(x)=e^x$, on a $f^{(k)}(x)=e^x$. Ainsi, pour tout k, $f^{(k)}(0)=1$ pour tout k. Ainsi,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(|x|^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(|x|^n).$$

(ii) Voyons comment on trouve le développement limité de $\frac{1}{1-x}$. On a vu dans l'exemple 3.42, page 94 que la série géométrique de raison x converge pour $|x|<1$ et

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k+x^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{k-n-1}=\sum_{k=0}^{n}x^k+x^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}x^k+x^{n+1}\frac{1}{1-x}.$$

Or,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0.$$

Ainsi, si $r(x)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$, on a $r(0)=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=0$ et

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+r(x).$$

Par définition, ceci veut dire

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(|x|^n).$$

Par unicité du développement limité (proposition 8.8, page 187), on a le développement limité de $\frac{1}{1-x}$.

Proposition 8.10 (Reste d'une composition de développements limités)**.**
Soient $n,m\geq 1$, $x_0,y_0\in\mathbb{R}$, $r_f(x)=o(|x-x_0|)^n$ et

$$g(x)=\sum_{k=0}^{m}b_k(y-y_0)^k+r_g(y)$$

où $r_g(y)=o(|y-y_0|^m)$.
Supposons que

$$b_0=g(y_0)=x_0$$

Alors,

$$r_f(g(y))=o(|y-y_0|^n).$$

Démonstration. On doit montrer

$$\lim_{y\to y_0}\frac{r_f(g(y))}{(y-y_0)^n}=0,$$

c'est-à-dire, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tel que $\forall y$ tel que $0<|y-y_0|<\delta$, on a

$$\left|\frac{r_f(g(y))}{(y-y_0)^n}\right|\leq\varepsilon.$$

On distingue deux cas.
Cas 1 : $b_1\neq 0$.
Soit $\varepsilon>0$ quelconque.
Par définition de

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_f(x)}{(x-x_0)^n}=0,$$

il existe $\delta_1>0$ tel que pour tout x tel que $0<|x-x_0|<\delta_1$, on a

$$\left|\frac{r_f(x)}{(x-x_0)^n}\right|\leq\frac{\varepsilon}{(2|b_1|)^n}. \tag{8.10.1}$$

De plus, par définition de $\lim_{y\to y_0}g(y)=x_0$, il existe $\delta_2>0$ tel que pour tout y tel que $0<|y-y_0|<\delta_2$, on a

$$|g(y)-x_0|\leq\frac{\delta_1}{2}<\delta_1 \tag{8.10.2}$$

Remarquons de plus que

$$\lim_{y\to y_0} \frac{\sum_{k=1}^m b_k(y-y_0)^k + r_g(y)}{y-y_0} = b_1.$$

Ainsi, par définition, il existe $\delta_3 > 0$ tel que pour tout y tel que $0 < |y-y_0| < \delta_3$, on a

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^m b_k(y-y_0)^k + r_g(y)}{y-y_0} - b_1 \right| \leq |b_1|.$$

Ainsi, en particulier,

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^m b_k(y-y_0)^k + r_g(y)}{y-y_0} \right| \leq 2|b_1| \tag{8.10.3}$$

Posons $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\} > 0$ et soit y tel que $0 < |y-y_0| < \delta$.
Distinguons maintenant deux sous-cas.
Cas 1.1 : $g(y) = x_0$.
Dans ce cas,

$$\frac{r_f(g(y))}{(y-y_0)^n} = \frac{r_f(x_0)}{(y-y_0)^n} = 0 \leq \varepsilon.$$

Cas 1.2 : $g(y) \neq x_0$.
On a alors, par (8.10.2) $0 < |g(y) - x_0| < \delta_1$. Donc, en utilisant le fait que $g(y_0) = b_0 = x_0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{r_f(g(y))}{(y-y_0)^n}\right| &= \left|\frac{r_f(g(y))}{(g(y)-g(y_0))^n}\right| \left|\frac{g(y)-x_0}{y-y_0}\right|^n \\ &\leq \underbrace{\left|\frac{r_f(g(y))}{(g(y)-g(y_0))^n}\right|}_{\overset{(8.10.1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{(2|b_1|)^n}} \underbrace{\left|\frac{\sum_{k=1}^m b_k(y-y_0)^k + r_g(y)}{y-y_0}\right|^n}_{\overset{(8.10.3)}{\leq} (2|b_1|)^n} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration dans ce cas.
Cas 2 : $b_1 = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
Par définition de

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_f(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout x tel que $0 < |x-x_0| < \delta_1$, on a

$$\left| \frac{r_f(x)}{(x-x_0)^n} \right| \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{8.10.4}$$

De plus, par définition de $\lim_{y\to y_0} g(y) = x_0$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout y tel que $0 < |y-y_0| < \delta_2$, on a

$$|g(y) - x_0| \leq \frac{\delta_1}{2} < \delta_1 \tag{8.10.5}$$

Remarquons de plus que

$$\lim_{y\to y_0} \frac{\sum_{k=1}^m b_k(y-y_0)^k + r_g(y)}{y-y_0} = b_1.$$

Ainsi, par définition, il existe $\delta_3 > 0$ tel que pour tout y tel que $0 < |y-y_0| < \delta_3$, on a

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^m b_k(y-y_0)^k + r_g(y)}{y-y_0} \right| \leq \sqrt[2n]{\varepsilon}. \tag{8.10.6}$$

Posons $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\} > 0$ et soit y tel que $0 < |y - y_0| < \delta$.
Distinguons maintenant deux sous-cas.
Cas 2.1 : $g(y) = x_0$.
Dans ce cas,

$$\frac{r_f(g(y))}{(y-y_0)^n} = \frac{r_f(x_0)}{(y-y_0)^n} = 0 \leq \varepsilon.$$

Cas 2.2 : $g(y) \neq x_0$.
On a alors, par (8.10.5) $0 < |g(y) - x_0| < \delta_1$. Donc, en utilisant le fait que $g(y_0) = b_0 = x_0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{r_f(g(y))}{(y-y_0)^n}\right| &= \left|\frac{r_f(g(y))}{(g(y)-g(y_0))^n}\right| \left|\frac{g(y)-x_0}{y-y_0}\right|^n \\ &\leq \underbrace{\left|\frac{r_f(g(y))}{(g(y)-g(y_0))^n}\right|}_{\overset{(8.10.4)}{\leq} \sqrt{\varepsilon}} \underbrace{\left|\frac{\sum_{k=1}^m b_k (y-y_0)^k + r_g(y)}{y-y_0}\right|^n}_{\overset{(8.10.6)}{\leq} \sqrt{\varepsilon}} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration dans ce cas.

□

Exemple 8.11. (*i*) Calculons le développement limité de $\frac{e^x}{1-x}$ autour de $x_0 = 0$ et d'ordre 2. On a

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1-x} =& \frac{1}{1-x} e^x = \left(1 + x + x^2 + o(|x|^2)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(|x|^2)\right) \\ =& \underbrace{1 + 2x + \frac{5}{2}x^2}_{\text{polynôme d'ordre 2}} \\ &+ \underbrace{o(|x|^2) + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + 2o(|x|^2) + 2xo(|x|^2) + \frac{3}{2}x^2 o(|x|^2) + o(|x|^2)o(|x|^2)}_{\text{reste ?}}.\end{aligned}$$

On met d'un côté tout ce qui est un polynôme de degré 2 et le reste de l'autre. Le but est de montrer que tout le reste est un petit $o(|x|^2)$.
Par vérification directe, on a que les termes en x^3 et x^4 sont des petits $o(|x|^2)$. De plus, on peut aussi vérifier que

$$\begin{aligned}2o(|x|^2) =& o(|x|^2) \\ 2xo(|x|^2) =& o(|x|^3) \Rightarrow 2xo(|x|^2) = o(|x|^2) \\ \frac{3}{2}x^2 o(|x|^2), o(|x|^2)o(|x|^2) =& o(|x|^4) \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 o(|x|^2), o(|x|^2)o(|x|^2) = o(|x|^2).\end{aligned}$$

Vu qu'une somme de petits $o(|x|^2)$ est un petit $o(|x|^2)$, on déduit

$$\frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(|x|^2),$$

et donc par unicité du développement limité, on a bien trouvé le développement limité de $e^x/(1-x)$.

(*ii*) Calculons le développement limité de $\cos(\pi + \sin(x))$ d'ordre 3 autour de 0.
Vu qu'en 0, $\pi + \sin(x)$ vaut π, on doit développer cos autour de π.

On a
$$\pi+\sin(x)=\pi+x-\frac{1}{6}x^3+o(|x|^3).$$
Pour calculer le développement limité de x autour de π, on utilise la formule de Taylor (voir théorème 8.3, page 184). On a

$$\begin{aligned}
& & \cos(\pi)&=-1\\
\cos'(x)&=-\sin(x) & \cos'(\pi)&=-\sin(\pi)=0\\
\cos''(x)&=-\cos(x) & \cos''(\pi)&=-\cos(\pi)=1\\
\cos'''(x)&=\sin(x) & \cos'''(\pi)&=\sin(\pi)=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, le développement limtié d'ordre 3 de cos autour de π est
$$\begin{aligned}
\cos(x)=&-1+\frac{0}{1!}(x-\pi)^1+\frac{1}{2!}(x-\pi)^2+\frac{0}{3!}(x-\pi)^3+o(|x-\pi|^3)\\
=&-1+\frac{1}{2}(x-\pi)^2+o(|x-\pi|^3).
\end{aligned}$$
Donc,
$$\cos(\pi+\sin(x))=-1+\frac{1}{2}\left(\pi+x-\frac{1}{6}x^3+o(|x|^3)-\pi\right)^2+o(|\pi+\sin(x)-\pi|^3)$$
Attention, l'écriture $o(|\pi+\sin(x)-\pi|^3)$ ne veut rien dire. On se permet d'écrire ce genre de chose pour aller plus vite. En réalité, la bonne façon d'écrire ce terme serait d'écrire $r_1(x)$, le reste du cosinus, et ensuite
$$r_1(\pi+\sin(x)).$$
De plus, par la proposition 8.10, page 189, on a que
$$r_1(\pi+\sin(x))=o(|x|^3).$$
En reprenant, on a
$$\begin{aligned}
\cos(\pi+\sin(x))=&-1+\frac{1}{2}\left(\pi+x-\frac{1}{6}x^3+o(|x|^3)-\pi\right)^2+o(|x|^3)\\
=&-1+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{36}x^6+o(|x|^3)o(|x|^3)-\frac{1}{3}x^4+2(x-\frac{1}{6}x^3)o(|x|^3)\right)+o(|x|^3)\\
=&1+\frac{1}{2}x^2+o(|x|^3),
\end{aligned}$$
où tous les termes de degrés 4 ou plus et les termes faisant apparaître un petit o sont des petits $o(|x|^3)$ par des arguments similaire à l'exemple précédent.
On a ainsi bien trouvé le développement limité de $\cos(\pi+\sin(x))$ autour de 0.
Ce qu'il faut retenir de cet exemple est que lorsqu'on calcule le développement limité d'une composition de fonction $(f\circ g)(x)$, autour de x_0, il faut faire attention de développer f autour de $g(x_0)$. Si on développe g au bon endroit, au moment de la composition le terme $o(|g(x)-g(x_0)|^n)$ sera automatiquement un petit $o(|x-x_0|^n)$.

Exemple 8.12 (application au calcul de limites)**.** (i) Calculons
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)-\frac{1}{2}x\sin(x^3)}{x^8}.$$

Il est possible de calculer cette limite à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hospital, mais il faut l'appliquer 8 fois. Dériver 8 fois le numérateur sans faire d'erreur est très difficile et long.

On s'intéresse plutôt au développement limité du numérateur d'ordre 8. On choisit l'ordre 8 car le dénominateur fera que $\frac{o(|x|^8)}{x^8}$ tend vers 0. On a

$$\begin{aligned}
\cos(x) =& 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!} + o(|x|^8) \\
1 - \cos(x^2) =& \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{6!}x^{12} - \frac{1}{8!}x^{16} + o(|x|^{16}) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8) \\
\sin(x) =& x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8) \\
\frac{1}{2}x\sin(x^3) =& \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2\cdot 3!}x^{10} + \frac{1}{2\cdot 5!}x^{16} - \frac{1}{2\cdot 7!}x^{22} + \frac{1}{2}xo(|x|^{24}) = \frac{1}{2}x^4 + o(|x|^8).
\end{aligned}$$

On conclut

$$1 - \cos(x^2) - \frac{1}{2}x\sin(x^3) = -\frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8).$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2) - \frac{1}{2}x\sin(x^3)}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8)}{x^8} = -\frac{1}{24} + \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{o(|x|^8)}{x^8}}_{=0} = -\frac{1}{24}.$$

(ii) Calculons

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(x^2) - \frac{1}{2}x\sin(x^3)}{(\sin(x))^8}.$$

Une nouvelle question se pose dans ce genre de cas : Jusqu'à quel ordre développer le numérateur.

Dans ce genre de situation, on va développer le numérateur et le dénominateur jusqu'au même ordre. On choisit l'ordre tel que le polynôme dans le développement limité du dénominateur n'a qu'un seul terme. Ici en particulier, on choisit n tel que

$$(\sin(x))^8 = a_n x^n + o(|x|^n).$$

Ici, vu que $\sin(x) = x+$ des termes d'ordre plus grand ou égal à 2 on aura que $(\sin(x))^8 = x^8+$ des termes d'ordre plus grand ou égal à 9. On développe donc le $(\sin(x))^8$ autour de 0 à l'ordre 8. On a

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8),$$

donc

$$\begin{aligned}
&(\sin(x))^8 \\
&= \underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8)\right)\cdots\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(|x|^8)\right)}_{8\times}
\end{aligned}$$

Développer cette multiplication en somme consiste à choisir un élément dans chaque parenthèse, et les multiplier entre eux. Or, si on choisit un terme de la parenthèse qui n'est pas x, on obtiendra quelque chose d'ordre 9 ou plus ou quelque chose qui est multiplié par $o(|x|^8)$. Tous ces termes seront des petit $o(|x|^8)$. Le seul terme qui nous intéresse donc est celui où on choisit le terme x dans chaque parenthèse. On conclut ainsi,

$$(\sin(x))^8 = x^8 + o(|x|^8).$$

On peut maintenant calculer

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(x^2)-\frac{1}{2}x\sin(x^3)}{(\sin(x))^8} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24}x^8 + o(|x|^8)}{x^8+o(|x|^8)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{24}+o(|x|^8)}{1+\frac{o(|x|^8)}{x^8}} = -\frac{1}{24}.$$

8.2 Séries de Taylor

Exemple 8.13. (i) Soit $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Alors, $f \in C^\infty(]-1,1[)$ et on a vu que le développement limité de f autour de 0 assure qu'il existe $r_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $r_n(0)=0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + r_n(x).$$

Que se passe-t-il si on prend la limite quand n tend vers l'infini ?

On a par convergence de la série géométrique que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = f(x),$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k = 0.$$

Ainsi, dans cet exemple si n tend vers l'infini, le reste du développement limité tend vers 0 et on obtient une représentation exacte de la fonction sous forme de série de puissances de x.

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. (On le montre en montrant que $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ et en utilisant le théorème 6.12, page 152.)

Ainsi, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, et le développement limitié de f autour de 0 est

$$f(x) = o(|x|^n).$$

En prenant la limite quand n tend vers l'infini, il n'est pas possible que le reste du développement limité de f autour de 0 tende vers 0 pour $x \neq 0$, et on ne peut pas représenter f sous forme de série de puissances de x.

Définition 8.14 (fonction analytique, séries de Taylor)**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f \in C^\infty(I)$.

(i) Pour $x_0 \in I$, on dit que f *est analytique en* x_0 si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

La série est appelée la *série de Taylor de f autour de x_0*.

(ii) On dit que f *est analytique* si pour tout $x_0 \in I$, f est analytique en x_0.

Exemple 8.15 (Séries de Taylor de fonctions usuelles à connaître)**.**
Les polynômes sont analytiques ; la série de Taylor est alors une somme finie.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} && \forall x \in]-1, 1[\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k && \forall x \in]-1, 1[\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k && \forall x \in]-1, 1[
\end{aligned}$$

La série de Taylor de l'exponentielle est souvent utilisée comme définition de la fonction e^x.

Exemple 8.16.
Voyons quelques exemples de comment utiliser les séries de Taylor ci-dessus pour en calculer d'autres.

(i) Soit $f\colon]-2, 2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2+x}.$$

Calculons la série de Taylor de f autour de 1. On a

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2 + (x-1) + 1} = \frac{1}{3 + (x-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{3}}.$$

Or, si $|x - 1|/3 < 1$, on a

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x-1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-1)^k,$$

qui est la série de Taylor de f.

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{2x}.$$

Calculons la série de Taylor de f autour de 1 avec deux méthodes.

La première consiste à utiliser la série de Taylor de e^x qu'on connait. On a

$$f(x) = e^{2(x-1)+2} = e^2 e^{2(x-1)} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2(x-1))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!}(x-1)^k.$$

Calculons maintenant la série de Taylor de f à l'aide de la définition.
On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}.$$

Alors, par définition de la série de Taylor, celle-ci est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k e^2}{k!}(x-1)^k,$$

qui est la même série qu'avec notre première méthode.

8.3 Séries entières

Théorème 8.17.
Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite, $x_0 \in \mathbb{R}$ et la série avec paramètre x

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k.$$

Alors, il y a 3 possibilités :

(i) La série ne converge que pour $x = x_0$.

(ii) Il existe $r > 0$ tel que la série converge absolument pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, et diverge pour $x \notin [x_0 - r, x_0 + r]$.

(iii) La série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas, l'ensemble

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \ \textit{converge} \right\}$$

est un intervalle.

Démonstration. On analyse la série qui dépend d'un paramètre à l'aide du critère de la limsup (voir théorème 3.49, page 100 et la remarque 3.50, page 101).
Soit

$$l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x-x_0)^n|} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

On distingue trois cas.
Cas 1 : Supposons que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.
Dans ce cas, on a

$$l = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_0 \\ +\infty & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

donc, par la critère de la limsup, la série converge pour $x = x_0$ et diverge pour $x \neq x_0$, qui est notre première possibilité. De plus, on a alors $I = \{x_0\} = [x_0, x_0]$, qui est bien un intervalle.

Cas 2 : Supposons que $0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$.
Posons $r = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Alors, pour tout x tel que $|x - x_0| < r$, on a $l < 1$ et donc par le critère de la limsup, la série converge.
De plus, pour tout x tel que $|x - x_0| > r$, on a $l > 1$ et donc par le critère de la limsup, la série diverge, ce qui est notre deuxième possibilité. De plus, on a alors

$$I =]x_0 - r, x_0 + r[\text{ ou } [x_0 - r, x_0 + r[\text{ ou }]x_0 - r, x_0 + r] \text{ ou } [x_0 - r, x_0 + r]$$

en fonction de si la série converge en $x_0 - r$ et $x_0 + r$, mais dans tous les cas, I est un intervalle.
Cas 3 : Supposons que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.
Dans ce cas, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $l = 0$ et donc la série converge absolument ce qui est notre troisième possibilité. De plus, on a alors $I = \mathbb{R}$ qui est bien un intervalle. □

Définition 8.18 (Série entière, rayon de convergence, intervalle de convergence)**.**
Soit une suite $(a_k)_{k\geq 0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et la série avec paramètre x

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

La *série entière* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ est la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

où

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ converge} \right\},$$

est appelé *l'intervalle de convergence de la série entière* et si r est tel que

$$I =]x_0 - r, r_0 + r[\text{ ou } [x_0 - r, r_0 + r[\text{ ou }]x_0 - r, r_0 + r] \text{ ou } [x_0 - r, r_0 + r]$$

on appelle r le *rayon de convergence de la série entière* (avec $r = 0$ si $I = [x_0, x_0]$ et $r = +\infty$ si $I = \mathbb{R}$).

Remarque 8.19.
Pour trouver le rayon de convergence, on résout

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x - x_0|^n} < 1 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x - x_0|^{n+1}}{|a_n||x - x_0|^n} < 1$$

pour $|x - x_0|$.

Exemple 8.20. (i) Soit la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (x - 1)^k.$$

On utilise le critère de la limsup :

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^k |x - 1|^k} = 2|x - 1|.$$

De plus, $2|x-1|<1$ est équivalent à $|x-1|<\frac{1}{2}$ et donc le rayon de convergence de cette série entière est $\frac{1}{2}$. De plus, pour $x = x_0 - r = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

qui diverge et pour $x = x_0 + r = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$$

qui diverge et donc l'intervalle de convergence est

$$\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[.$$

(ii) Soit la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k.$$

On utilise le critère de D'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|(k+1)!x^{k+1}|}{|k!x^k|} = \lim_{k\to\infty}(k+1)|x| = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

La série ne converge que pour $x=0$ et donc, le rayon de convergence de la série est 0.

(iii) Soit la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}(x-14)^k.$$

On utilise le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}(x-14)^{k+1}}{\frac{2^k}{k!}(x-14)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1}(x-14) = 0,$$

donc la série entière converge tout le temps et son rayon de convergence est $r=+\infty$ et son intervalle de convergence est

$$I = \mathbb{R}.$$

(iv) Soit la série entière

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(x+2)^{2k}.$$

On utilise le critère de d'Alembert :

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)^2 4^{k+1}}(x+2)^{2k+2}}{\frac{1}{k^2 4^k}(x+2)^{2k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{4k^2+8k+4}|x+2|^2 = \frac{1}{4}|x+2|^2.$$

De plus, $\frac{1}{4}|x+2|^2 < 1$ est équivalent à $|x+2|<2$. Ainsi le rayon de convergence de la série entière est 2. De plus, pour $x = x_0 - r = -2-2 = -4$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(x+2)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(-2)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

qui converge. Et, pour $x = x_0 + r = -2 + 2 = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 4^k}(x+2)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

qui converge également. Ainsi, l'intervalle de convergence de la série entière est

$$[-4, 0] .$$

Théorème 8.21.
Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ une série entière de rayon $r > 0$. Alors,

(i) $f \in C^{\infty}(]x_0 - r, x_0 + r[)$.

(ii) On a que

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$$

est une série entière avec le même rayon de convergence. Plus généralement, on a $f^{(n)} \colon]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ est donné par

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x - x_0)^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} (x - x_0)^k.$$

En particulier,

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n.$$

(iii) f est analytique sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Démonstration. (i) Découle du point suivant.

(ii) On sépare la démonstration en 3 étapes.

Étape 1 : On montre que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$$

est r.

Au vu de la démonstration du théorème 8.17, page 196, on a

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

De plus, le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$ est donné par

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(k+1)|a_{k+1}|}$$

On fait la démonstration sous l'hypothèse plus forte que la limsup dans

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

est une limite *.

$*$. Sans cette hypothèse, il faudrait commencer par montrer que pour deux suites de nombres positifs (x_n) et (y_n), si (x_n) est bornée et (y_n) converge, alors, $\limsup_{n\to\infty} x_n y_n = (\limsup_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n)$.

On a alors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(k+1)|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1}\left(\sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}\right)^{\frac{k+1}{k}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1}e^{\log\left(\sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}\right)\cdot\frac{k+1}{k}} = e^{\log(\frac{1}{r})} = \frac{1}{r},\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de cette étape.

Étape 2 : On montre que pour tout $0 \leq \rho < r$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\rho^k < \varepsilon$$
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)|a_{k+1}|\rho^k < \varepsilon.$$

Dans l'étape 1, on a vu que

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|}.$$

Donc,

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\rho^k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|\rho^k} = \frac{\rho}{r} < 1.$$

Par le critère de la limsup (voir théorème 3.49, page 100), les séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|a_k|\rho^k$$

convergent.

C'est-à-dire, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned}&\forall n \geq N_1, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\rho^k = \left|\sum_{k=0}^{n} |a_k|\rho^k - \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\rho^k\right| < \varepsilon \\ &\forall n \geq N_2, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)|a_{k+1}|\rho^k \left|\sum_{k=0}^{n}(k+1)|a_{k+1}|\rho^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}|\rho^k\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Prenant $N = \max\{N_1, N_2\}$, on a le résultat.

Étape 3 : On montre que pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$,

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k.$$

Soit donc $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ et $\varepsilon > 0$ quelconques et $\rho = \frac{r+|x-x_0|}{2} < r$. Par l'étape 2, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\rho^k < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)|a_{k+1}|\rho^k < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Remarquons que

$$\left(\sum_{k=0}^{N+1} a_k(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{N+1} ka_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{N}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k.$$

Ainsi, par définition, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $h \in]-\delta_1, \delta_1[\setminus\{0\}$,

$$\left|\frac{\sum_{k=0}^{N+1} a_k(x+h-x_0)^k - \sum_{k=0}^{N+1} a_k(x-x_0)^k}{h} - \sum_{k=0}^{N}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit enfin $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{r-|x-x_0|}{2}\right\} > 0$. Alors, si $h \in]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$ est quelconque, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{\sum_{k=0}^{N+1} a_k(x+h-x_0)^k - \sum_{k=0}^{N+1} a_k(x-x_0)^k}{h}\right| \\
&\quad + \underbrace{\left|\frac{\sum_{k=0}^{N+1} a_k(x+h-x_0)^k - \sum_{k=0}^{N+1} a_k(x-x_0)^k}{h} - \sum_{k=0}^{N}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k\right|}_{\overset{h\in]-\delta_1,\delta_1[\setminus\{0\}}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} \\
&\quad + \left|\sum_{k=0}^{N}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k\right| \\
&\leq \left|\frac{\sum_{k=N+2}^{\infty} a_k(x+h-x_0)^k - \sum_{k=N+2}^{\infty} a_k(x-x_0)^k}{h}\right| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\quad + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k\right| \\
&\leq \sum_{k=N+2}^{\infty}|a_k|\left|\frac{(x+h-x_0)^k-(x-x_0)^k}{h}\right| + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}||x-x_0|^k \\
&\leq \sum_{k=N+2}^{\infty}|a_k|\left|\frac{x+h-x_0-(x-x_0)}{h}\sum_{j=1}^{k-1}(x+h-x_0)^j(x-x_0)^{k-1-j}\right| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}||x-x_0|^k \\
&\leq \sum_{k=N+2}^{\infty}|a_k|\sum_{j=1}^{k-1}|x+h-x_0|^j|x-x_0|^{k-1-j} + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}||x-x_0|^k.
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
|x+h-x_0| &\leq |x-x_0| + |h| \leq |x-x_0| + \frac{r-|x-x_0|}{2} = \frac{r+|x-x_0|}{2} = \rho \\
|x-x_0| &\leq \frac{|x-x_0|+|x-x_0|}{2} \leq \frac{r+|x-x_0|}{2} = \rho.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=N+2}^{\infty}|a_k|\sum_{j=1}^{k-1}|x+h-x_0|^j|x-x_0|^{k-1-j} &\leq \sum_{k=N+2}^{\infty}|a_k|\sum_{j=1}^{k-1}\rho^j\rho^{k-1-j}\\ &\leq \sum_{k=N+2}^{\infty}|a_k|k\rho^{k-1}\\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty}|a_{k+1}|(k+1)\rho^k \leq \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}||x-x_0|^k \leq \sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}|\rho^k \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On conclut,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.
Étape 4 : On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!}a_{k+n}(x-x_0)^k.$$

Ancrage : Pour $n=1$, le membre de gauche est $f'(x)$ tandis que le membre de droite est

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k.$$

Par l'étape 3, le membre de gauche et de droite sont les mêmes et donc, le résultat est vrai pour $n=1$.
Pas de récurrence : Supposons que

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n)!}{k!}a_{k+n}(x-x_0)^k$$

et montrons que

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n+1)!}{k!}a_{k+n+1}(x-x_0)^k$$

Soit $b_k = \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n}$. Alors, par l'étape 3, et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} (x-x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(k+1+n)!}{(k+1)!} a_{k+1+n} (x-x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n+1)!}{k!} a_{k+n+1} (x-x_0)^k, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

(*iii*) On sépare la démonstration en 2 étapes.

Étape 1 : On montre que pour une fonction $f \in C^\infty(]a,b[)$, et $x_0 \in]a,b[$, f est analytique en x_0 si et seulement si il existe $M, r > 0$ tels que pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \frac{n!}{r^n}.$$

Commençons par supposer que f vérifie la propriété ci-dessus et montrons qu'elle est analytique.

Commençons par montrer que la série de Taylor a un rayon de convergence strictement positif.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

On a

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|} \leq \sqrt[k]{M} \frac{|x-x_0|}{r} = \frac{|x-x_0|}{r}.$$

Ainsi, si $|x-x_0| < r$, la série converge par le critère de la limsup (voir théorème 3.49, page 100) et donc le rayon de convergence de la série de Taylor est au moins r.

Par la formule de Taylor, (voir théorème 8.3, page 184), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, il existe $\theta_{x,n} \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_{x,n}(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

De plus, on a $x_0 + \theta_{x,n}(x-x_0) \in]x_0 - r, x_0 + r[$, et donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k - f(x)\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_{x,n}(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}\right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} M \left|\frac{x-x_0}{r}\right|^{n+1} \overset{|x-x_0|<r}{=} 0. \end{aligned}$$

Par le corollaire du critère des deux gendarmes (voir théorème 3.21, page 73), on conclut que pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x)$$

ce qui montre que f est analytique.
Passons à la réciproque.
Supposons que f est analytique en x_0. Par définition, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Fixons $0 < \delta < \rho$. Alors, $x_0 + \delta \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Ainsi,

$$f(x_0 + \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\delta^k.$$

En particulier, la série de droite converge, et donc son terme général tend vers 0 (voir proposition 3.43, page 95). Vu que toutes les suites convergentes sont bornées, il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$,

$$\left|\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right| \delta^k \leq C.$$

Posons $r = \frac{\delta}{2} > 0$, et considérons $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. Alors, par le point précédent,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(x)\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}\left|\frac{f^{(n+k)}(x_0)}{(n+k)!}\right| |x - x_0|^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}\left|\frac{f^{(n+k)}(x_0)}{(n+k)!}\right| r^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}\left|\frac{f^{(n+k)}(x_0)}{(n+k)!}\right| \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{\delta^n}\frac{(n+k)!}{k!}\underbrace{\left|\frac{f^{(n+k)}(x_0)}{(n+k)!}\right| \delta^{k+n}}_{\leq C} \\
&\leq \frac{C}{\delta^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout $t \in]-1, 1[$, $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}t^k = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}. \tag{8.21.1}$$

Ancrage : Si $n = 0$, l'identité se lit

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t},$$

qui est vrai ; il s'agit de la série géométrique de raison t.
Pas de récurrence : On a par le point précédent,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1+k)!}{k!}t^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}t^k\right)' = \left(\frac{n!}{(1-t)^{n+1}}\right)' = \frac{(n+1)!}{(1-t)^{n+2}},$$

qui montre bien le résultat voulu.
Revenant à notre estimation, on a

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{C}{\delta^n} \frac{n!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{2Cn!}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} = \frac{2Cn!}{r^n}.$$

Définissant $M = 2C$, on a le résultat.
Étape 2 : On montre que pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, il existe $M, r' > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, et $y \in]x - r' x + r'[$,

$$|f^{(n)}|(y) \leq M \frac{n!}{(r')^n}.$$

Soit donc, $|x - x_0| < \rho < r$. Alors, $x_0 + \rho \in]x_0 - r, x_0 + r[$ et donc, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$$

converge, donc son terme général tend vers 0. vu que les suites convergentes sont bornées, il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$,

$$|a_k| \rho^k \leq C.$$

Soit encore $0 < r' = \frac{\rho - |x - x_0|}{2}$ et $y \in]x - r', x + r'[$, $n \geq 0$ quelconque. Remarquons que

$$\begin{aligned} |y - x_0| \leq& |y - x| + |x - x_0| < r' + |x - x_0| \\ =& \frac{\rho - |x - x_0|}{2} + |x - x_0| = \frac{\rho + |x - x_0|}{2} < \rho < r. \end{aligned}$$

Donc,

$$y \in]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Ainsi, par le point précédent,

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(y)| \leq & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}|a_{k+n}||y-x_0|^k \\
\leq & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!}|a_{k+n}| \left(r' + |x-x_0|\right)^k \\
\leq & \frac{1}{\rho^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r' + |x-x_0|}{\rho}\right)^k \frac{(n+k)!}{k!} \underbrace{|a_{k+n}|\rho^{k+n}}_{\leq C} \\
\leq & \frac{C}{\rho^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} \left(\frac{r' + |x-x_0|}{\rho}\right)^k \\
\overset{(8.21.1)}{=} & \frac{C}{\rho^n} \frac{n!}{\left(1 - \frac{r'+|x-x_0|}{\rho}\right)^{n+1}} \\
= & C\rho \frac{n!}{(\rho - (r' + |x-x_0|))^{n+1}} \\
\overset{r'=\frac{\rho-|x-x_0|}{2}}{=} & C\rho \frac{n!}{\left(\rho - \frac{\rho-|x-x_0|}{2} - |x-x_0|\right)^{n+1}} \\
= & C\rho \frac{n!}{\left(\frac{\rho-|x-x_0|}{2}\right)^{n+1}} \\
\overset{r'=\frac{\rho-|x-x_0|}{2}}{=} & \frac{C\rho}{r'} \frac{n!}{(r')^n}.
\end{aligned}$$

Prenant $M = \frac{C\rho}{r'}$, on a le résultat. □

Remarque 8.22.
Une fonction analytique est une série entière autour de chaque point, mais la série entière et son rayon de convergence changent en fonction du point autour duquel on développe la fonction.

Chapitre 9

L'intégrale

9.1 Primitives

Définition 9.1 (Primitive)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $f\colon D \to \mathbb{R}$. Une fonction $F\colon D \to \mathbb{R}$ est une *primitive de* f si pour tout $x \in D$,

$$F'(x) = f(x).$$

On note alors

$$F(x) = \int f(x)dx \qquad \text{ou} \qquad \int^x f(t)dt.$$

Remarque 9.2.
Si il existe une primitive de f, F, alors il en existe une infinité. En effet pour tout $C \in \mathbb{R}$, $F + C$ est aussi une primitive de f.

Proposition 9.3.
Soient D un ouvert, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des primitives. Alors,

(i) On a

$$\int^x (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int^x f(t)dt + \beta \int^x g(t)dt.$$

(ii) si de plus g est dérivable et $g(D) \subset D$,

$$\int^x f(g(t))g'(t)dt = \int^{g(x)} f(t)dt$$

(iii) si de plus f et g sont dérivables,

$$\int^x f'(t)g(t)dt = f(x)g(x) - \int^x f(t)g'(t)dt.$$

Démonstration. (i) Soient des primitives

$$F(x) = \int^x f(t)dt$$
$$G(x) = \int^x f(t)dt.$$

Alors,

$$(\alpha F + \beta G)'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

C'est-à-dire, $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ et donc

$$\alpha \int^x f(t)dt + \beta \int^x g(t)dt = \alpha F(x) + \beta G(x) = \int^x (\alpha f(t) + \beta g(t))dt,$$

qui est le résultat voulu.

(*ii*) Si $F(x) = \int^x f(t)dt$, on a

$$\int^{g(x)} f(t)dt = F(g(x)) = (F \circ g)(x),$$

Et donc,

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x),$$

qui est le résultat.

(*iii*) On a

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ainsi,

$$f(x)g(x) = \int^x (fg)'(t)dt = \int^x f'(t)g(t) + f(t)g'(t)dt.$$

Ainsi, en réarrangeant les termes, on a

$$\int^x f'(t)g(t)dt = f(x)g(x) - \int^x f(t)g'(t)dt,$$

qui est le résultat voulu.

□

Proposition 9.4 (Primitives de fonctions usuelles)**.**
Soient $c \in \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $a \in \mathbb{R}^*$*.*
On regroupe dans un tableau les primitives des fonctions usuelles. Le tableau a trois colonnes, D*,* f *et* $\int^x f(t)dt$*. On a que* $\int^x f(t)dt$ *est une primitive de* f *sur* D*.*

D	$f(x)$	$\int^x f(t)dt$
$\mathbb{R}$	c	cx
$\mathbb{R}$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$]0,+\infty[$	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\log(\|x\|)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$\tan(x)$	$-\log(\cos(x))$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$]0,+\infty[$	$\log(x)$	$x\log(x)-x$

Démonstration. La démonstration consiste en des vérifications directes. □

Remarque 9.5.
Le tableau ci-dessus donne une primitive, mais pas toutes. Pour retrouver toutes les primitives, il faut encore faire $+C$ où C est une constante sur chaque intervalle du domaine. Pour toutes les fonctions ci-dessus, sauf $\frac{1}{x}$, le domaine n'étant qu'un intervalle, on retrouve toutes les primitives en ajoutat une constante. Par contre toutes les primitives de $\frac{1}{x}$ sont données par

$$\begin{cases} \log(x)+C_1 & \text{si } x>0 \\ \log(-x)+C_2 & \text{si } x<0, \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes qui peuvent être différentes.

9.2 L'intégrale de Riemann

Définition 9.6 (Subdivision, somme de Riemann, somme de Darboux)**.**
Soit $a<b$. *Une subdivision de l'intervalle* $[a,b]$ est la donnée d'une suite finie

$$a=x_0<x_1<x_2<x_3<...<x_n=b.$$

On note

$$\sigma=\{x_0,x_1,...,x_n\}$$

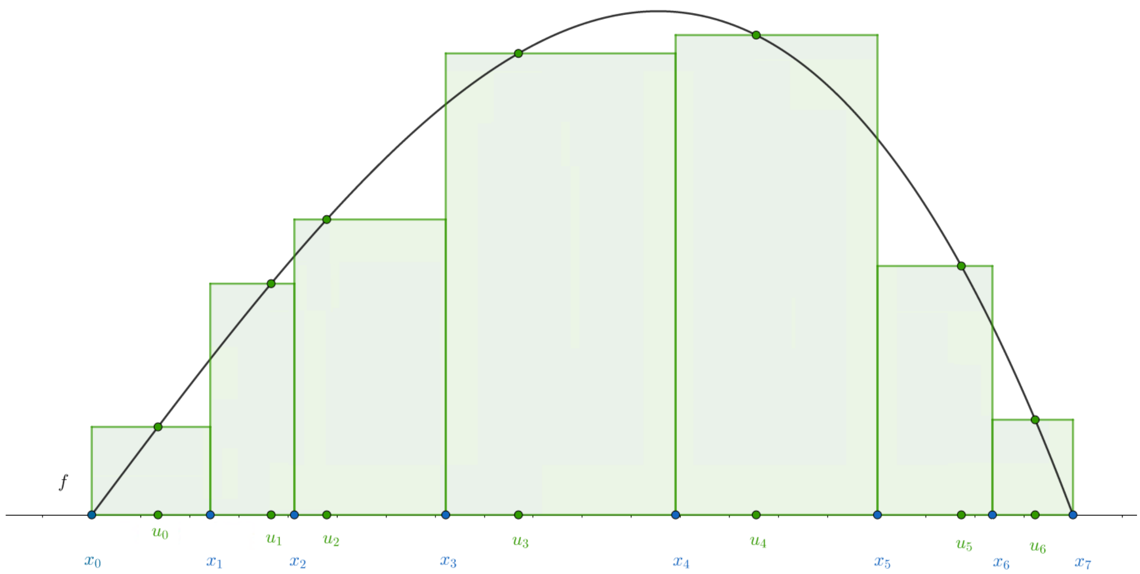
pour la subdivision.

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
Pour tout $0 \le k \le n-1$, soit

$$\begin{aligned} u_k &\in [x_k, x_{k+1}] \\ m_k &= \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \\ M_k &= \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \end{aligned}$$

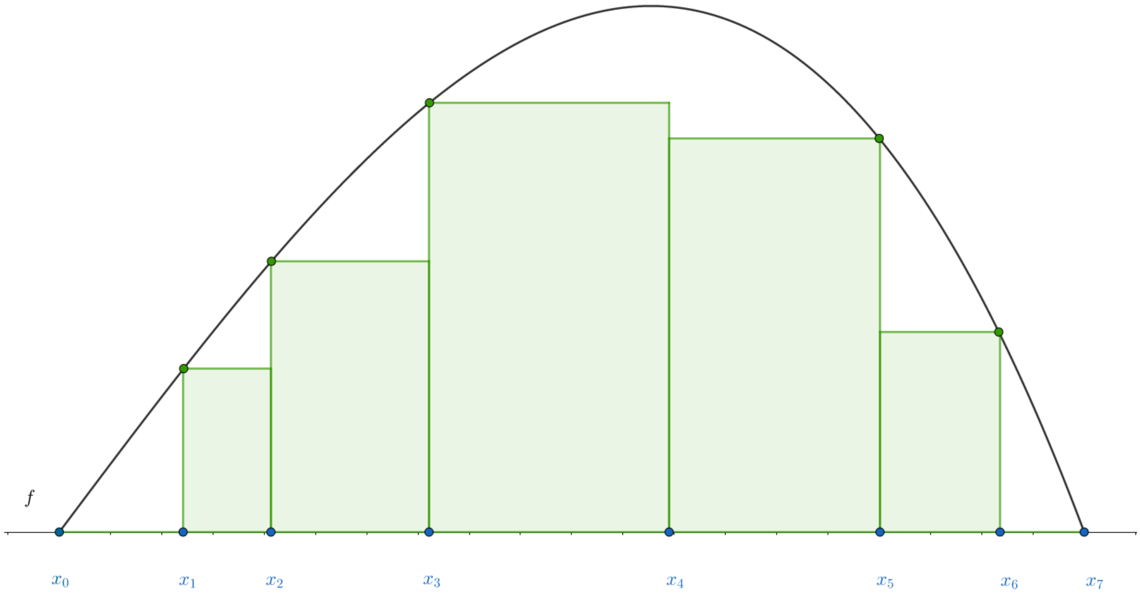
La *somme de Riemann de f* pour la subdivision σ et le choix $u_0, \ldots, u_{n-1}$ est

$$S(\sigma, u_0, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)(x_{k+1} - x_k).$$



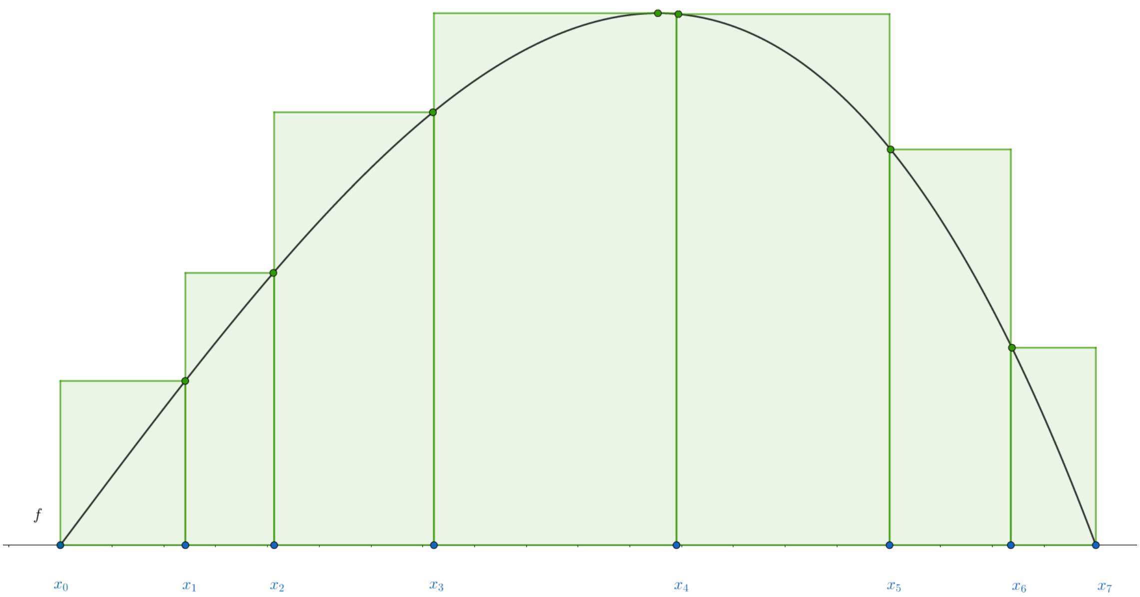
La *somme de Darboux inférieure de f* pour la subdivision σ est

$$\underline{S}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k).$$



La *somme de Darboux supérieure de f* pour la subdivision σ est

$$\overline{S}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k).$$



Remarque 9.7. (i) Pour toute subdivision σ et choix de $u_0, ..., u_{n-1}$, on a

$$\underline{S}(\sigma) \leq S(\sigma, u_0, ..., u_{n-1}) \leq \overline{S}(\sigma)$$

(ii) L'idée est que en ayant des subdivisions de $[a, b]$ avec de plus en plus de point, ces trois sommes vont converger vers l'aire sous la courbe, qu'on définit comme intégrale.

Définition 9.8 (Fonction intégrable, Intégrale)**.**
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est intégrable si

$$\sup\{\underline{S}(\sigma)\ :\ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\} = \inf\{\overline{S}(\sigma)\ :\ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}.$$

On note alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{\underline{S}(\sigma)\ :\ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}$$

Théorème 9.9.
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est intégrable.

Démonstration. On sépare la démonstration en deux étapes.
Étape 1 : On montre que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.
On procède par l'absurde. Supposons que $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0, \exists x, y \in [a,b]$ tel que $|x-y| < \delta$ et $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Prenant $\delta = \frac{1}{n}$, il existe $x_n, y_n \in [a,b]$ tel que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Vu que $a \leq x_n \leq b$, (x_n) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 3.33, page 86) il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1} \subset (x_n)$ convergente. Notons $l = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Alors, pour tout k,

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leq y_{n_k} \leq x_{n_k} + \frac{1}{n_k},$$

et vu que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \frac{1}{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} + \frac{1}{n_k} = l,$$

on a par le critère de comparaison (voir théorème 3.20, page 124) que $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = l$. Par continuité de f en l, on a

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(l).$$

Ainsi,

$$0 = |f(l) - f(l)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0,$$

ce qui est une contradiction.
Étape 2 : On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est une subdivision telle que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $x_{k+1} - x_k < \delta$, alors,

$$0 \leq \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Par l'étape 1, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ et $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision telle que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b \qquad \text{et} \qquad \forall 0 \leq k \leq n-1,\ x_{k+1} - x_k < \delta.$$

Remarquons que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, vu que f est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, par le théorème 5.17, page 140 f prend son maximum et son minimum sur $[x_k, x_{k+1}]$. Il existe donc $y_k, z_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que

$$f(y_k) = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = m_k$$
$$f(z_k) = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = M_k.$$

De plus, vu que $y_k, z_k \in [x_{k+1}, x_k]$, on a

$$|y_k - z_k| \le |x_{k+1} - x_k| = x_{k+1} - x_k < \delta.$$

Donc,

$$0 \le M_k - m_k = f(z_k) - f(y_k) \le |f(z_k) - f(y_k)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \le& \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\le \frac{\varepsilon}{b-a}} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{>0} \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 3 : On montre que si $\sigma_1 \subset \sigma_2$ sont deux subdivisions, alors

$$\begin{aligned} \underline{S}(\sigma_1) \le& \underline{S}(\sigma_2) \\ \overline{S}(\sigma_1) \ge& \overline{S}(\sigma_2) \end{aligned}$$

Soit donc $\sigma_1 = \{x_0, x_1, ..., x_{n_1}\} \subset \sigma_2 = \{y_0, y_1, ..., y_{n_2}\}$ deux subdivisions,

$$\begin{aligned} a =& x_0 < x_1 < ... < x_{n_1} = b \\ a =& y_0 < y_1 < ... < y_{n_2} = b. \end{aligned}$$

Vu que $\sigma_1 \subset \sigma_2$, pour tout $0 \le k \le n_1$, il existe $0 \le j(k) \le n_2$ tel que $x_k = y_{j(k)}$. En particulier, on a $j(0) = 0$ et $j(n_1) = n_2$.
Remarquons qu'alors, pour tout $0 \le k \le n_1 - 1$ et $j(k) \le j \le j(k+1) - 1$,

$$[y_j, y_{j+1}] \subset [y_{j(k)}, y_{j(k+1)}] = [x_k, x_{k+1}].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x) \le& \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) \\ \inf_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x) \ge& \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \underline{S}(\sigma_2) &= \sum_{j=0}^{n_2-1} \inf_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x)(y_{j+1} - y_j) = \sum_{j=j(0)}^{j(n_1)-1} \inf_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x)(y_{j+1} - y_j) \\ &= \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} \inf_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x)(y_{j+1} - y_j) \ge \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(y_{j+1} - y_j) \\ &= \sum_{k=0}^{n_1-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} (y_{j+1} - y_j) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(y_{j(k+1)} - y_{j(k)}) \\ &= \sum_{k=0}^{n_1-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k) = \underline{S}(\sigma_1) \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(\sigma_2) &= \sum_{j=0}^{n_2-1} \sup_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x)(y_{j+1}-y_j) = \sum_{j=j(0)}^{j(n_1)-1} \sup_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x)(y_{j+1}-y_j)\\
&= \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} \sup_{x\in[y_j,y_{j+1}]} f(x)(y_{j+1}-y_j) \leq \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(y_{j+1}-y_j)\\
&= \sum_{k=0}^{n_1-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) \sum_{j=j(k)}^{j(k+1)-1} (y_{j+1}-y_j) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(y_{j(k+1)}-y_{j(k)})\\
&= \sum_{k=0}^{n_1-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1}-x_k) = \overline{S}(\sigma_1)
\end{aligned}
$$

qui est le résultat voulu.
Étape 4 : On conclut.
On définit

$$
\begin{aligned}
\underline{S} &= \sup\{\underline{S}(\sigma)\ :\ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}\\
\overline{S} &= \inf\{\overline{S}(\sigma)\ :\ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}
\end{aligned}
$$

et on montre que pour tout $\varepsilon > 0$, $|\underline{S} - \overline{S}| \leq \varepsilon$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Par la caractérisation du suprémum et de l'infimum (voir théorème 1.11, page 36), il existe σ_1 et σ_2 deux subdivisions telles que

$$
\begin{aligned}
\underline{S} &\geq \underline{S}(\sigma_1) \geq \underline{S} - \frac{\varepsilon}{3}\\
\overline{S} &\leq \overline{S}(\sigma_2) \leq \overline{S} + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Par l'étape 1, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est une subdivision telle que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $x_{k+1} - x_k < \delta$, alors,

$$
0 \leq \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) \leq \frac{\varepsilon}{3}
$$

Soit $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$. On construit ensuite σ la subdivision qui consiste à ajouter des points à σ_3 jusqu'à ce que, si

$$
\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\},
$$

alors, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $x_{k+1} - x_k < \delta$. Remarquons que $\sigma_1 \subset \sigma$ et $\sigma_2 \subset \sigma$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
|\underline{S} - \overline{S}| &= |\underline{S} - \underline{S}(\sigma)| + |\underline{S}(\sigma) - \overline{S}(\sigma)| + |\overline{S}(\sigma) - \overline{S}|\\
&= \underline{S} - \underline{S}(\sigma) + \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) + \overline{S}(\sigma) - \overline{S}\\
&\leq \underline{S} - \underline{S}(\sigma_1) + \frac{\varepsilon}{3} + \overline{S}(\sigma_2) - \overline{S}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

qui est le résultat voulu et termine la démonstration. □

Proposition 9.10.
Soient $a < c < b$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

(i) on a

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(ii) l'intégrale est linéaire, c'est-à-dire,

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

(iii) si $f \leq g$,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(iv) si $f \geq 0$ et

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

alors, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.

(v) on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)dx.$$

Démonstration. (i) On note, pour $\sigma_1 = \{x_1, x_2, ..., x_{n_1}\}$ avec $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n_1} = c$ une subdivision de $[a, c]$, $\sigma_2 = \{y_0, y_1, ..., y_{n_2}\}$ avec $c = y_0 < y_1 < ... < y_{n_2} = b$ une subdivision de $[c, b]$ et $\sigma_3 = \{z_0, z_2, ..., z_{n_3}\}$ avec $a = z_0 < z_1 < ... < z_{n_3} = b$ une subdivision de $[a, b]$

$$\underline{S}_{a,c}(\sigma_1) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\overline{S}_{a,c}(\sigma_1) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\underline{S}_{c,b}(\sigma_2) = \sum_{k=0}^{n_2-1} \inf_{x\in[y_k,y_{k+1}]} f(x)(y_{k+1} - y_k)$$

$$\overline{S}_{c,b}(\sigma_2) = \sum_{k=0}^{n_2-1} \sup_{x\in[y_k,y_{k+1}]} f(x)(y_{k+1} - y_k)$$

$$\underline{S}_{a,b}(\sigma_3) = \sum_{k=0}^{n_3-1} \inf_{x\in[z_k,z_{k+1}]} f(x)(z_{k+1} - z_k)$$

$$\overline{S}_{a,b}(\sigma_3) = \sum_{k=0}^{n_3-1} \sup_{x\in[z_k,z_{k+1}]} f(x)(z_{k+1} - z_k)$$

Soit $\sigma = \{z_0, z_2, ..., z_n\}$ avec $a = z_0 < z_1 < ... < z_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ quelconque. On définit σ_c de la façon suivante : Si $c \in \sigma$, on définit, $\sigma_c = \sigma$. Si $c \notin \sigma$, il existe $1 \leq n_1 \leq n$ tel que $z_{n_1-1} < c < z_{n_1}$. On définit alors $n' = n + 1$, pour $0 \leq k \leq n'$,

$$z'_k = \begin{cases} z_k & \text{si } 0 \leq k \leq n_1 - 1 \\ z_k = c & \text{si } k = n_1 \\ z_{k-1} & \text{si } n_1 + 1 \leq k \leq n' \end{cases}$$

et $\sigma_c = \{z'_0, z'_1, ..., z'_{n'}\}$. Remarquons que dans les deux cas, par l'étape 3 de la démonstration du théorème 9.9, page 212), vu que $\sigma \subset \sigma_c$, on a

$$\begin{aligned}\underline{S}_{a,b}(\sigma) \leq & \underline{S}_{a,b}(\sigma_c) \\ \overline{S}_{a,b}(\sigma) \geq & \overline{S}_{a,b}(\sigma_c)\end{aligned}$$

Pour éviter de surcharger les notations, on redéfinit $n = n'$, $z_k = z'_k$ et $\sigma_c = \{z_0, ..., z_n\}$ et n_1 tel que $c = z_{n_1}$. Posons $n_2 = n - n_1$ et définissions

$$\begin{aligned}&\forall 0 \leq k \leq n_1,\ x_k = z_k \\ &\forall 0 \leq k \leq n_2,\ y_k = z_{k+n_1}\end{aligned}$$

On a alors,

$$\begin{aligned}a = x_0 < x_1 < ... < x_{n_1} = c \\ c = y_0 < y_1 < ... < y_{n_2} = b\end{aligned}$$

d'où $\sigma_1 = \{x_0, .., x_{n_1}\}$ est une subdivision de $[a, c]$ et $\sigma_2 = \{y_0, ..., y_{n_2}\}$ est une subdivision de $[c, b]$. On déduit

$$\begin{aligned}\underline{S}_{a,b}(\sigma) \leq & \underline{S}_{a,b}(\sigma_c) = \underline{S}_{a,c}(\sigma_1) + \underline{S}_{c,b}(\sigma_2) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ \overline{S}_{a,b}(\sigma) \geq & \overline{S}_{a,b}(\sigma_c) = \overline{S}_{a,c}(\sigma_1) + \overline{S}_{c,b}(\sigma_2) \geq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Vu que la subdivision σ est quelconque, on déduit, en prenant le suprémum dans la première ligne et l'infimum dans la deuxième ligne parmis toutes les subdivisions de $[a, b]$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Les deux estimations combinées donnent le résultat.

(ii) On sépare la démonstration en six étapes.
Étape 1 : On montre que

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Pour $\sigma = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, on note

$$\begin{aligned}\overline{S}_f(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k) \\ \underline{S}_{-f}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} (-f(x))(x_{k+1} - x_k)\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\underline{S}_{-f}(\sigma) =& \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]}(-f(x))(x_{k+1}-x_k) = -\sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1}-x_k)\\ =& -\overline{S}_f(\sigma)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^b -f(x)dx =& \sup\{\underline{S}_{-f}(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}\\ =& \sup\{-\overline{S}_f(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}\\ =& -\inf\{\overline{S}_f(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\} = -\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Étape 2 : On montre que pour $\alpha \geq 0$,

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Pour $\sigma = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$, on note

$$\begin{aligned}\overline{S}_f(\sigma) =& \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1}-x_k)\\ \overline{S}_{\alpha f}(\sigma) =& \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} (\alpha f(x))(x_{k+1}-x_k).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\overline{S}_{\alpha f}(\sigma) =& \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} (\alpha f(x))(x_{k+1}-x_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1}-x_k)\\ =& \alpha \overline{S}_f(\sigma).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x)dx =& \inf\{\underline{S}_{\alpha f}(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}\\ =& \inf\{\alpha \underline{S}_f(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\}\\ =& \alpha \inf\{\underline{S}_f(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\} = \alpha \int_a^b f(x)dx,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.
Étape 3 : On montre que pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Si $\alpha \geq 0$, on a le résultat par l'étape précédente. Si $\alpha < 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x)dx =& \int_a^b -|\alpha| f(x)dx \overset{\text{étape 1}}{=} -\int_a^b |\alpha| f(x)dx \overset{\text{étape 2}}{=} -|\alpha| \int_a^b f(x)dx\\ =& \alpha \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

Étape 4 : On montre que

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Pour $\sigma = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, on note

$$\begin{aligned}
\underline{S}_f(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k)\\
\underline{S}_g(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} g(x)(x_{k+1} - x_k)\\
\underline{S}_{f+g}(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} (f(x) + g(x)))(x_{k+1} - x_k).
\end{aligned}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque. Par la caractérisation du suprémum (voir théorème 1.11, page 36) il existe σ_1, σ_2 deux subdivisions de $[a, b]$ telles que

$$\begin{aligned}
\underline{S}_f(\sigma_1) &\geq \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}\\
\underline{S}_g(\sigma_2) &\geq \int_a^b g(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Soit $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ et notons $\sigma = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Alors par l'étape 3 de la démonstration du théorème 9.9, page 212, on a

$$\begin{aligned}
\underline{S}_f(\sigma) &\geq \underline{S}_f(\sigma_1)\\
\underline{S}_g(\sigma) &\geq \underline{S}_g(\sigma_2)
\end{aligned}$$

On déduit donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) + g(x)dx \geq & \underline{S}_{f+g}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} (f(x) + g(x))(x_{k+1} - x_k)\\
\geq & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) + \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} g(x) \right) (x_{k+1} - x_k)\\
= & \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} g(x)(x_{k+1} - x_k)\\
= & \underline{S}_f(\sigma) + \underline{S}_g(\sigma) \geq \underline{S}_f(\sigma_1) + \underline{S}_g(\sigma_2)\\
\geq & \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vu que $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

qui est le résultat voulu.
Étape 5 : On montre que

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Par étape 4, il suffit de montrer que

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)+g(x)+(-g(x))dx &\overset{\text{étape 4}}{\geq} \int_a^b f(x)+g(x)dx + \int_a^b (-g(x))dx \\ &\overset{\text{étape 1}}{=} \int_a^b f(x)+g(x)dx - \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on a le résultat.
Étape 6 : On conclut.
On a

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx &\overset{\text{étape 5}}{=} \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx \\ &\overset{\text{étape 3}}{=} \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de ce point.

(iii) Pour $\sigma = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$, on note

$$\begin{aligned}\overline{S}_f(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1}-x_k) \\ \overline{S}_g(\sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} g(x)(x_{k+1}-x_k)\end{aligned}$$

Alors,

$$\overline{S}_f(\sigma) \leq \overline{S}_g(\sigma).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \inf\{\overline{S}_f(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\} \\ &\leq \inf\{\overline{S}_g(\sigma) \ : \ \sigma \text{ est une subdivision de } [a,b]\} \\ &= \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

(iv) On procède par contraposée. On suppose que $f \geq 0$ et qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$ et on montre qu'alors $\int_a^b f(x)dx > 0$.
Soit $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}|$. Ainsi, pour tout $x \in \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right]$

$$f(x) = f(x_0)-(f(x_0)-f(x)) \geq f(x_0)-|f(x)-f(x_0)| \geq f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Ainsi, par des points précédents et le fait que pour une constante, $\int_a^b cdx = c(b-a)$,

$$\begin{aligned}0 < \delta\frac{f(x_0)}{2} &= \int_a^{x_0-\frac{\delta}{2}} 0dx + \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} \frac{f(x_0)}{2} + \int_{x_0+\frac{\delta}{2}}^b 0dx \\ &\leq \int_a^{x_0-\frac{\delta}{2}} f(x)dx + \int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} f(x) + \int_{x_0+\frac{\delta}{2}}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu. □

Théorème 9.11 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Soit $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors,

(i) la fonction $F\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f.

(ii) pour tout $x_0 \in [a,b]$, la fonction $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt & \text{si } x > x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \\ \displaystyle -\int_x^{x_0} f(t)dt & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

est une primitive de f sur $]a,b[$. De plus, $F'_d(a) = f(a)$ et $F'_g(b) = f(b)$.

(iii) si $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f, on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. (i) Soit $x \in]a,b[$, $\varepsilon > 0$ quelconque. Par continuité de f en x, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $t \in]x-\delta_1, x+\delta_1[$, $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.
Soit $\delta = \frac{\delta_1}{2} > 0$ et $h \in]-\delta, \delta[\backslash \{0\}$ quelconque.
Si $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt\right| \\ &= \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} f(t)-f(x)dt\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underbrace{|f(t)-f(x)|}_{\leq\varepsilon} dt \\ &\leq \frac{1}{h}h\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tandis que si $h <$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)dt - \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} f(x)dt\right| \\ &= \frac{1}{-h}\left|\int_{x+h}^{x} f(x)-f(t)dt\right| \leq \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} \underbrace{|f(t)-f(x)|}_{\leq\varepsilon} dt \\ &\leq \frac{1}{-h}(-h)\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que pour tout $h \in]-\delta, \delta[\backslash \{0\}$,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x),$$

qui est le résultat voulu.

(ii) On a
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt.$$
Vu que $\int_a^{x_0} f(t)dt$ est une constante, le résultat découle de l'étape 1. Le fait que $F'_d(a) = f(a)$ et $F'_g(b) = f(b)$ de démontre de façon très similaire au point 1 où on utilise la continuité de f à droite de a et à fauche de b respectivement.

(iii) Soit $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. On a alors, par le point (i),
$$G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$
Ainsi, par la proposition 6.28, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + C$. Ainsi
$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - 0,$$
qui est le résultat voulu. □

Exemple 9.12.
Soit $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.
On a vu que $F(x) = -\cos(x)$ est une primitive de f. Ainsi,
$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = F(2\pi) - F(0) = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0.$$
Notons que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ malgré le fait que $f(x) \neq 0$ pour beaucoup de x. On voit que l'hypothèse $f \geq 0$ est importante dans la proposition 9.10, page 214.

Remarque 9.13.
Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f. C'est-à-dire, toute fonction continue admet une primitive. L'existence de cette primitive F ne veut pas dire qu'on peut écrire F à l'aide de combinaisons (addition, soustraction, multiplication, division et composition) de fonctions élémentaires. Par exemple, on n'a pas de bonne formule pour
$$\int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Théorème 9.14 (Théorème de la moyenne)**.**
Soit $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Démonstration. Par le théorème fondamental du calcul intégral (voir théorème 9.11, page 220), la fonction $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
est une primitive de f et
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Vu que F est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, par le théorème des accroissements finis (voir théorème 6.22, page 6.22), il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a),$$

c'est-à-dire,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a),$$

qui est le résultat voulu. $\square$

9.3 Techniques de calcul d'intégrales

Notation 9.15.
On écrit $[f(x)]_a^b$ pour $f(b) - f(a)$ de telle sorte que

$$\int_a^b f'(x)dx = [f(x)]_a^b.$$

Théorème 9.16 (Intégration par parties)**.**
Soient $a < b$*,* $f, g \in C^1([a, b])$*.*
Alors,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Démonstration. Par la proposition 9.3, page 207 et le théorème 9.11, page 220 que

$$F(x) = f(x)g(x) - \int_a^x f(t)g'(x)$$

est une primitive de $f'(x)g(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)dx =& F(b) - F(a) = f(b)g(b) - \int_a^b f(x)g'(x)dx - f(a)g(a) + 0\\ =& [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx,\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu. $\square$

Exemple 9.17. (i) Calculons

$$\int_0^\pi (x^2 + 1)\cos(x)dx.$$

On pose

$$\begin{matrix} f(x) = x^2 + 1 & g(x) = ? \\ f'(x) = ? & g'(x) = \cos(x) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = x^2 + 1 & g(x) = \sin(x) \\ f'(x) = 2x & g'(x) = \cos(x) \end{matrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x^2 + 1)\cos(x)dx \overset{\text{IPP}}{=} & \int_0^\pi f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^\pi - \int_0^\pi f(x)g(x)\\ =& [(x^2 + 1)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin(x)dx\\ =& (\pi^2 + 1)0 - 1 \cdot 0 - \int_0^\pi 2x\sin(x)dx = -\int_0^\pi 2x\sin(x)dx.\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2x & g(x) = ? \\ f'(x) = ? & g'(x) = \sin(x) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} f(x) = 2x & g(x) = -\cos(x) \\ f'(x) = 2 & g'(x) = \sin(x) \end{array}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x^2+1)\cos(x)dx = & -\int_0^\pi 2x\sin(x)dx \\ \overset{\text{IPP}}{=} & -[2x(-\cos(x))]_0^\pi + \int_0^\pi -2\cos(x)dx \\ = & 2\pi(-1) - 2\cdot 0\cdot 1 - 2\int_0^\pi \cos(x)dx \\ = & -2\pi - 2[-\sin(x)]_0^\pi = -2\pi - 2\sin(\pi) + 2\sin(0) = -2\pi. \end{aligned}$$

(ii) Calculons

$$I = \int_0^\pi \sin(2x)\cos(3x)dx.$$

On pose

$$\begin{array}{ll} f(x) = ? & g(x) = \cos(3x) \\ f'(x) = \sin(2x) & g'(x) = ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) & g(x) = \cos(3x) \\ f'(x) = \sin(2x) & g'(x) = -3\sin(3x) \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I \overset{\text{IPP}}{=} & \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(3x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{3}{2}\cos(2x)\sin(3x)dx \\ = & -\frac{1}{2}\cos(2\pi)\cos(3\pi) + \frac{1}{2}\cos(0)\cos(0) - \frac{3}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\sin(3x)dx \\ = & 1 - \frac{3}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\sin(3x)dx. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{array}{ll} f(x) = ? & g(x) = \sin(3x) \\ f'(x) = \cos(2x) & g'(x) = ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) & g(x) = \sin(3x) \\ f'(x) = \cos(2x) & g'(x) = 3\cos(3x) \end{array}$$

Donc,

$$\begin{aligned} I \overset{\text{IPP}}{=} & 1 - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\sin(3x)\right]_0^\pi + \frac{9}{4}\int_0^\pi \sin(2x)\cos(3x)dx \\ = & 1 - \frac{3}{4}\cdot 0\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot 0\cdot 0 + \frac{9}{4}I. \end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que l'intégrale qu'on cherche à calculer est solution de l'équation

$$I = 1 - \frac{9}{4}I$$

c'est-à-dire

$$I = \frac{4}{13}.$$

(*iii*) Calculons
$$\int_1^x \log(t)dt$$
On a
$$\int_1^x \log(t)dt = \int_1^x 1 \cdot \log(t)dt.$$
On pose donc
$$\begin{array}{ll} f(t) = ? & g(t) = \log(t) \\ f'(t) = 1 & g'(t) = ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} f(t) = t & g(t) = \log(t) \\ f'(t) = 1 & g'(t) = \frac{1}{t} \end{array}$$
Ainsi,
$$\int_1^x \log(t)dt \overset{\text{IPP}}{=} [t\log(t)]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}dt = x\log(x) - 1\log(1) - [t]_1^x = x\log(x) - x + 1.$$

Théorème 9.18.
Soient $a < b$, $\alpha < \beta$, $f \in C^0([a,b])$ et $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ telle que $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Alors,

(*i*) *on a*
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$
(*ii*) *si de plus $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est bijective, et $\varphi^{-1} \in C^1([a,b])$, on a*
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)dx$$

Démonstration. (*i*) Soient $F \in C^1([a,b])$ une primitive de f, $g \in C^0([\alpha,\beta])$ et $G \in C^1([\alpha,\beta])$ définies par
$$\begin{aligned} G(x) =& F(\varphi(x)) \\ g(x) =& f(\varphi(x))\varphi'(x). \end{aligned}$$
Alors,
$$G'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) = g(x),$$
donc, G est une primitive de g. Ainsi,
$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int_\alpha^\beta g(x)dx = G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx, \end{aligned}$$
qui est le résultat voulu.

(*ii*) Commençons par remarquer que vu que φ est bijective et son inverse est dérivable, on a que φ' ne s'annule jamais (voir remarque 6.18, page 156). Soit donc $\tilde{f} \in C^0([a,b])$ définie par
$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$
En appliquant le point précédent à cette fonction, on a
$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{f(x)}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}dx &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \tilde{f}(x)dx = \int_\alpha^\beta \tilde{f}(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{f(\varphi(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x)))}\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))dx \end{aligned}$$
qui est le résultat voulu.

□

Exemple 9.19. (*i*) Calculons
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$
à l'aide du changement de variables $x = \varphi(t) = \tan(t)$. Pour appliquer la première partie du théorème, il faut résoudre $1 = \tan(t)$, $0 = \tan(t)$ et calculer $\varphi'(t)$. Or, $\tan(\pi/4) = 1$, $\tan(0) = 0$ et $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$. Ainsi,
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)}dt.$$
De plus,
$$1+\tan^2(t) = 1 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$
Ainsi,
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(t)}{\cos^2(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)dt$$
$$= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(*ii*) Calculons
$$\int_0^3 e^{\sqrt{1+x}}dx.$$
On pose $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$. On a donc
$$\varphi^{-1}(x) = x^2 - 1 \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$
Ainsi, par le deuxième résultat du théorème
$$\int_0^3 e^{\sqrt{1+x}}dx = \int_0^3 e^{\varphi(x)} = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(3)} \frac{e^x}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}dx = \int_1^2 \frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2-1}}}dx = \int_1^2 e^x 2x dx$$
On procède maintenant à une intégration par parties. On pose
$$\begin{matrix} f(x) = ? & g(x) = 2x \\ f'(x) = e^x & g'(x) = ? \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = e^x & g(x) = 2x \\ f'(x) = e^x & g'(x) = 2 \end{matrix}$$
Donc,
$$\int_0^3 e^{\sqrt{1+x}}dx = [e^x 2x]_1^2 - \int_1^2 2e^x dx = 4e^2 - 2e - 2[e^x]_1^2 = 4e^2 - 2e - 2e^2 + 2e = 2e^2.$$
On propose encore ici une autre façon de faire le changement de variable, il s'agit d'une méthode qui va plus vite et plus facile à apprendre.
On pose $t = \sqrt{1+x}$. Ainsi,
$$x(t) = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2tdt.$$

et

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$x = 3 \Rightarrow t = 2$$

Et donc,

$$\int_0^3 \underbrace{e^{\sqrt{1+x}}}_{=e^t} \underbrace{dx}_{=2tdt} = \int_1^2 e^t 2tdt,$$

et on trouve la même intégrale qu'avant.

Exemple 9.20 (Décomposition en éléments simples)**.** (i) Calculons

$$\int_1^3 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$$

Remarquons qu'on connait les primitives

$$\int^x \frac{1}{t} dt = \log(x)$$
$$\int^x \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan(x)$$
$$\int^x \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

On pose donc la question existe-t-il $A, B, C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}.$$

Vu que les dénominateurs de ces deux expression est le même, l'égalité est vérifiée si les numérateurs sont égaux

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A,$$

qui est une égalité entre deux polynômes. Pour que deux polynômes soient égaux, il faut qu'ils aient les mêmes coefficients.

$$0x^2 + 0x + 1 = (A+B)x^2 + Cx + A,$$

ce qui nous donne le système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ C &= 0 \\ A &= 1 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{(x^2+1)}dx =& \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \left[\log(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^3 \\ =& \log(3) - \frac{1}{2}\log(10) - \log(1) + \frac{1}{2}\log(2) \\ =& \log(3) + \frac{1}{2}\log(2) - \frac{1}{2}\log(10).\end{aligned}$$

(ii) Calculons

$$\int_a^b \frac{x}{x^2+2x+3}dx$$

On aimerait se ramener à quelque chose de similaire à des primitives qu'on connaît :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t}{t^2+1}dt =& \frac{1}{2}\log(x^2+1) \\ \int^x \frac{1}{t^2+1}dt =& \arctan t.\end{aligned}$$

Remarquons que le dénominateur ne s'annule jamais car le discriminant du polynôme est $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$ est négatif.

De plus, dans le dénominateur

$$x^2 + 2x + 3,$$

les deux premiers termes (x^2 et $2x$) sont les mêmes que les deux premiers termes du produit remarquable $(x+1)^2$.

Ainsi, on écrit

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + 3 = (x+1)^2 + 2.$$

Donc,

$$\int_a^b \frac{x}{x^2+2x+3}dx = \int_a^b \frac{x}{(x+1)^2+2}dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx.$$

On procède au changement de variables $y = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

$$x(y) = \sqrt{2}y - 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{2} \Rightarrow dx = \sqrt{2}dy$$

et

$$\begin{aligned}x = a \Rightarrow y = \frac{a+1}{\sqrt{2}} \\ x = b \Rightarrow y = \frac{b+1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{x}{x^2+2x+3}dx =& \frac{1}{2}\int_{\frac{a+1}{\sqrt{2}}}^{\frac{b+1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}y-1}{y^2+1}\sqrt{2}dy = \int_{\frac{a+1}{\sqrt{2}}}^{\frac{b+1}{\sqrt{2}}} \frac{y}{y^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{y^2+1}dy \\ =& \left[\frac{1}{2}\log(y^2+1) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(y)\right]_{\frac{a+1}{\sqrt{2}}}^{\frac{b+1}{\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

(*iii*) Calculons

$$\int_3^5 \frac{1}{x^3-4x^2+9x-10}dx.$$

Commençons par factoriser $x^3-4x^2+9x-10$. On peut voir que 2 est une racine de ce polynôme et donc

$$x^3-4x^2+9x-10=(x-2)(x^2-2x+5)$$

et le polynôme de degré 2, x^2-2x+5, ne s'annule pas car son discriminant $\Delta = 16-4\cdot 1\cdot 5=-4$ est négatif.

On décompose à nouveau

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-4x^2+9x-10} =& \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\\ =& \frac{(A+B)x^2+(C-2A-2B)x+5A-2C}{x^3-4x^2+9x-10}.\end{aligned}$$

On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B &=& 0\\ C-2A-2B &=& 0\\ 5A-2C &=& 1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A &=& \frac{1}{5}\\ B &=& -\frac{1}{5}\\ C &=& 0\end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x^3-4x^2+9x-10}=\frac{1}{5}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{5}\frac{x}{x^2-2x+5}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x^2-2x+5}=\frac{1}{(x-1)^2+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}.$$

On obtient donc

$$\int_3^5 \frac{1}{x^3-4x^2+9x-10}dx = \frac{1}{5}\int_3^5 \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{20}\int_3^5 \frac{x}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx$$

On connaît une primitive de la première intégrale et on fait le changement de variables $y=\frac{x-1}{2}$ dans la deuxième intégrale.

$$x(y)=2y+1 \Rightarrow \frac{dx}{dy}=2 \Rightarrow dx=2dy.$$

et

$$\begin{aligned} x=3 &\Rightarrow y=1\\ x=5 &\Rightarrow y=2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{x^3-4x^2+9x-10}dx =& \frac{1}{5}[\log(x-2)]_3^5 - \frac{1}{20}\int_1^2 \frac{2y+1}{y^2+1}2dy\\ =& \frac{1}{5}\log(3) - \frac{1}{10}\int_1^2 \frac{2y}{y^2+1}+\frac{1}{y^2+1}dy\\ =& \frac{1}{5}\log(3) - \frac{1}{10}\Big[\log(y^2+1)+\arctan(y)\Big]_1^2\\ =& \frac{1}{5}\log(3)\\ &-\frac{1}{10}\log(5)-\frac{1}{10}\arctan(2)+\frac{1}{10}\log(2)+\frac{1}{10}\arctan(1)\end{aligned}$$

(*iv*) Calculons
$$\int_3^5 \frac{1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$$
On commence par factoriser le dénominateur dont les racines sont 1 et 2.
$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2).$$
Lorsqu'on fait une décomposition en éléments simples et qu'un terme de la factorisation apparait plusieurs fois (ici $x-1$ apparaît 2 fois), la décomposition se fait de la façon suivante :
$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-4x^2+5x-2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(B-3A-2C)x+2A-2B+C}{x^3-4x^2+5x-2}\end{aligned}$$
ce qui nous donne le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} A+C &=& 0\\ B-3A-2C &=& 0\\ 2A-2B+C &=& 1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A &=& -1\\ B &=& -1\\ C &=& 1\end{array}\right.$$
On calcule donc
$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{x^3-4x^2+5x-2}dx &= \int_3^5 -\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2}dx\\ &= \left[-\log(x-1)+\frac{1}{x-1}+\log(x-2)\right]_3^5\\ &= -\frac{1}{4}-\log(2)+\log(3).\end{aligned}$$

Remarque 9.21. (*i*) Si on calcule une intégrale
$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)}dx$$
avec $\deg(p)\geq\deg(q)$, on commence par faire la division euclidienne de p par q : $p(x)=d(x)q(x)+r(x)$ avec $\deg(r)<\deg(q)$ et on a
$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)}dx=\int_a^b d(x)+\frac{r(x)}{q(x)}dx.$$
On trouve une primitive de d de façon directe et on fait une décomposition en éléments simples de $\frac{r(x)}{q(x)}$.

(*ii*) Plus généralement après factorisation du dénominateur, pour les facteurs du type $(x-a)^n$, on considère le terme
$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(x-a)^k},$$
dans la décomposition et pour chaque facteur du type $(x+bx+c)^n$, on considère le terme
$$\sum_{k=1}^n \frac{A_kx+B_k}{(x+bx+c)^k}$$

9.4 Intégrale généralisée

Définition 9.22 (Intégrale généralisée de type I)**.**
Soient $a < b$.

(i) Soit $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ continue. *L'intégrale généralisée de f sur* $]a,b]$ est

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

si la limite existe.

(ii) Soit $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ continue. *L'intégrale généralisée de f sur* $[a,b[$ est

$$\int_{a}^{b^-} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a}^{b-\delta} f(x)dx$$

si la limite existe.

(iii) Soit $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_{a^+}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{b^-} f(x)dx$$

existent. *L'intégrale généralisée de f sur* $]a,b[$ est

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0^+} \lim_{\delta_2 \to 0^+} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx$$

(iv) Dans les trois points ci-dessus, si la limite n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée *diverge*.

Remarque 9.23. (i) L'hypothèse qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_{a^+}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{b^-} f(x)dx$$

existent dans la troisième partie de la définition est équivalent à ce que pour tout $\tilde{c} \in]a,b[$ les intégrales

$$\int_{a^+}^{\tilde{c}} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{\tilde{c}}^{b^-} f(x)dx$$

existent.

En d'autres termes, si il existe un c tel que ces deux intégrales existent, alors elles existent pour tout c. En effet, pour tout $\tilde{c} \in]a,b[$, on a

$$\int_{a^+}^{\tilde{c}} f(x)dx = \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\tilde{c}} f(x)dx$$
$$\int_{\tilde{c}}^{b^-} f(x)dx = \int_{c}^{b^-} f(x)dx + \int_{\tilde{c}}^{c} f(x)dx.$$

(ii) Dans la troisième partie de la définition, l'ordre des limites

$$\lim_{\delta_1 \to 0^+} \lim_{\delta_2 \to 0^+}$$

n'a pas d'importance. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta_1 \to 0^+} \lim_{\delta_2 \to 0^+} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx &= \lim_{\delta_1 \to 0^+} \int_{a+\delta_1}^{c} f(x)dx + \lim_{\delta_2 \to 0^+} \int_{c}^{b-\delta_2} f(x)dx \\ &= \lim_{\delta_2 \to 0^+} \lim_{\delta_1 \to 0^+} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)dx.\end{aligned}$$

Exemple 9.24. (i) Calculons

$$\int_{0^+}^{1} \log(x)dx.$$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta}^{1} \log(x)dx &= \lim_{\delta\to 0^+} [x\log(x) - x]_{\delta}^{1}\\ &= \lim_{\delta\to 0^+} -1 - \delta\log(\delta) + \delta = -1\end{aligned}$$

(ii) Considérons

$$\int_{-1^+}^{1^-} \frac{x}{1-x^2}dx.$$

Remarquons que

$$\int_{0}^{1^-} \frac{x}{1-x^2}dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{-1}{2}\log(1-x^2)\right]_{0}^{1-\delta} = \lim_{\delta\to 0^+}\frac{-1}{2}\log(2\delta-\delta^2) = +\infty$$

et donc l'intégrale diverge.
Remarquons que la limite

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{x}{1-x^2}dx &= \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{-1}{2}\log(1-x^2)\right]_{-1+\delta}^{1-\delta}\\ &= \lim_{\delta\to 0}\frac{-1}{2}\log(1-(1-\delta)^2) + \frac{1}{2}\log(1-(\delta-1)^2)\\ &= \lim_{\delta\to 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

On voit ici l'importance de prendre des limites indépendantes

$$\lim_{\delta_1\to 0^+}\lim_{\delta_2\to 0^+}$$

dans le cas où on calcule une intégrale généralisée d'une fonction $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$.

Définition 9.25 (Intégrale généralisée de type II)**.**
Soient $a<b$.

(i) Soit $f\colon]-\infty,b]\to\mathbb{R}$ continue. *L'intégrale généralisée de f sur* $]-\infty,b]$ est

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{b} f(x)dx$$

si la limite existe.

(ii) Soit $f\colon [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue. *L'intégrale généralisée de f sur* $[a,+\infty[$ est

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{a}^{M} f(x)dx$$

si la limite existe.

(iii) Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

existent. *L'intégrale généralisée de f sur* $\mathbb{R}$ est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M_1\to+\infty}\lim_{M_2\to+\infty}\int_{-M_1}^{M_2} f(x)dx.$$

(*iv*) Dans les trois points ci-dessus, si la limite n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée *diverge.*

Remarque 9.26.
Comme dans le cas des intégrales de type I, dans la troisième partie de la définition, si les limites existent pour un c alors elles existent pour tout c et l'ordre des limites

$$\lim_{M_1 \to +\infty} \lim_{M_2 \to +\infty}$$

n'a pas d'importance, mais il est important que les limites dans les deux bornes de l'intégrale soient prises de façon indépendantes.

Définition 9.27 (intégrales généralisées de type III)**.**
Soient $a < b$.

(*i*) Soit $f\colon]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que

$$\int_{a^+}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

existent. *L'intégrale généralisée de f sur* $]a, +\infty[$ est

$$\int_{a^+}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{M \to +\infty} \int_{a+\delta}^{M} f(x)dx$$

si la limite existe.

(*ii*) Soit $f\colon] - \infty, b[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $c \in] - \infty, b[$ tel que

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{c}^{b^-} f(x)dx$$

existent. *L'intégrale généralisée de f sur* $] - \infty, b[$ est

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{b-\delta} f(x)dx$$

si la limite existe.

(*iii*) Dans les deux points ci-dessus, si la limite n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée *diverge.*

Remarque 9.28.
Comme dans le cas des intégrales de type I et II, dans les deux points de la définition, si les limites existent pour un c alors elles existent pour tout c et l'ordre des limites

$$\lim_{\delta \to 0^+} \lim_{M \to +\infty}$$

n'a pas d'importance, mais il est important que les limites dans les deux bornes de l'intégrale soient prises de façon indépendantes.

Exemple 9.29. (*i*) Soit $\alpha > 0$, $f_\alpha\colon]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Déterminons les paramètres α pour lesquel l'intégrale généralisée

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

existe.
On distingue deux cas.
Cas 1 : $\alpha \neq 1$.
On a

$$\int_{0^+}^{1} f_\alpha(x) dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{\delta}^{1} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{\delta^{\alpha-1}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Cas 2 : $\alpha = 1$.
On a

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \to 0^+} (\log(1) - \log(\delta)) = +\infty.$$

Ainsi, on conclut que l'intégrale

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge si et seulement si $\alpha < 1$ et elle vaut alors

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$$

(ii) Soit $\alpha > 0$, $f_\alpha \colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Déterminons les paramètres α pour lesquel l'intégrale généralisée

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

existe.
On distinque deux cas
Cas 1 : $\alpha \neq 1$.
On a

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_{1}^{M} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \to +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{1}^{M}$$

$$= \lim_{M \to \infty} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{M^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Cas 2 : $\alpha = 1$

On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} (\log(M) - \log(1)) = +\infty.$$

Ainsi, on conclut que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ et elle vaut alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Proposition 9.30.
Soit $\alpha > 0$. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. On commence par supposer que $\alpha > 1$ et on montre que la série converge. L'idée est d'utiliser le critère de comparaison (théorème 3.46, page 96) et de comparer la série à

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

qu'on sait converge par l'exemple précédent.

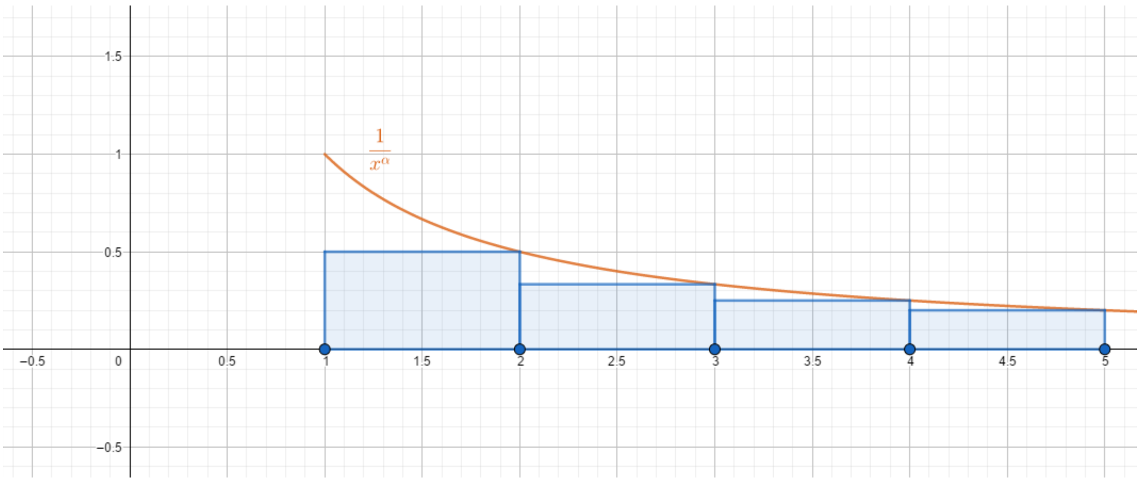


FIGURE 9.1 – En orange, le graphe de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$. L'aire sous la courbe orange est l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ qu'on sait est finie. En bleu, des rectangles d'aire $\frac{1}{n^\alpha}$. Vu que les rectangles sont tous sous la courbe, la somme de l'aire de tous ces rectangles est plus petite que l'aire sous la courbe qu'on sait finie.

Soit donc $n \geq 2$. Alors, vu que $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[n-1, n]$, on a pour tout $x \in [n-1, n]$,

$$\frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ainsi,

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx \geq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} dx = \left[\frac{x}{n^\alpha}\right]_{n-1}^{n} = \frac{n}{n^\alpha} - \frac{n-1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

De plus,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} < +\infty.$$

Ainsi, par le critère de comparaison,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge.
Montrons maintenant que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge, alors $n > 1$.
On procède par contraposée, c'est-à-dire, on suppose que $0 < \alpha \leq 1$ et on montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

diverge.
L'idée est de comparer la série à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{N \to \infty} \int_{1}^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

qu'on sait diverge.

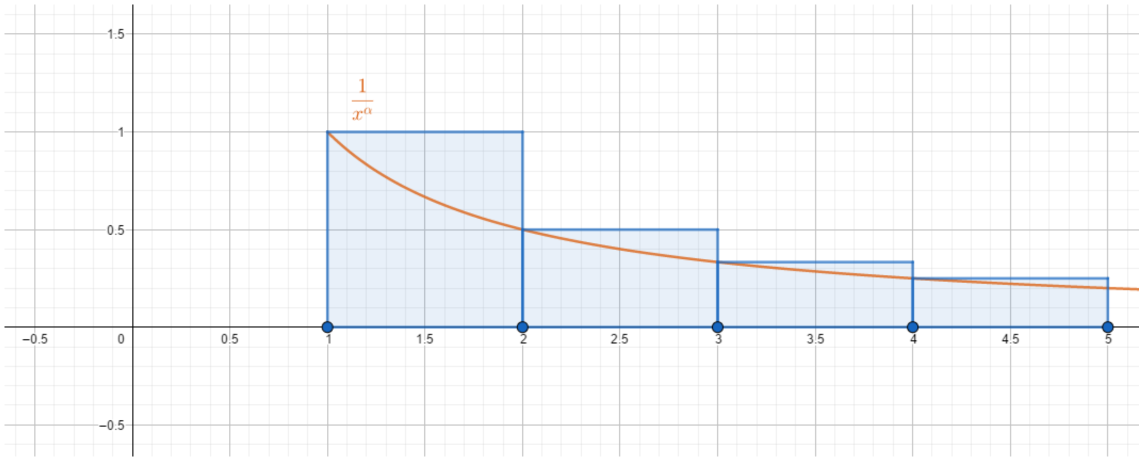


FIGURE 9.2 – En orange, le graphe de la fonction $\frac{1}{x^\alpha}$. L'aire sous la courbe orange est l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ qu'on sait est infinie. En bleu, des rectangles d'aire $\frac{1}{n^\alpha}$. Vu que la courbe est toujours sous un rectangle, la somme de l'aire de tous ces rectangles est plus grande que l'aire sous la courbe qu'on sait infinie.

Soit donc $n \geq 1$. Alors, vu que $\frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $[n, n+1]$, on a pour tout $x \in [n, n+1]$,

$$\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Donc,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^\alpha} dx = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

Par le critère de comparaision,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

diverge. □

9.5 Primitives de séries entières et développements limités

Proposition 9.31 (Primitive d'un développement limité)**.**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f \in C^n(I)$ dont le développement limité autour de x_0 s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n)$$

et F une prmitive de f. Alors, le développement limité de F autour de x_0 s'écrit

$$F(x) = C + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o(|x-x_0|^{n+1}) = C + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k}(x-x_0)^{k} + o(|x-x_0|^{n+1}).$$

Démonstration. Par unicité du développement limité, on a

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^{n+1})$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^{n}) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

De plus, vu que F est une primitive de f, on a pour tout $k \geq 1$,

$$F^{(k)}(x_0) = f^{(k-1)}(x_0) = a_{k-1}(k-1)!.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F(x) =& F(x_0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}(k-1)!}{k!}(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^{n+1}) \\ =& C + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k}(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^{n+1}), \end{aligned}$$

où $C = F(x_0)$. Ceci termine la démonstration. □

Proposition 9.32 (Primitive d'une série entière)**.**
Soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

une série entière avec un rayon de convergence $r > 0$.
Alors les séries entières de la forme

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}(x-x_0)^k$$

ont le même rayon de convergence $r > 0$ et sont les primitives de

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

sur $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème 8.21, page 199. □

Exemple 9.33. (*i*) Calculons la série de Taylor de l'arctangente.

On a

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Ainsi, en prenant la primitive de chaque terme dans la série,

$$\arctan(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

On finit par trouver la constante en évaluant les deux parties de l'égalité en $x = 0$. On a $0 = \arctan(0) = C$ et donc

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

(ii) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

la primitive de e^{-x^2} qui s'annule en 0.

On a déjà remarqué que cette fonction n'a pas d'écriture simple. Voyons comment l'écrire sous forme de série de Taylor.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}.$$

On déduit, qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}.$$

De plus, on a

$$C = f(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0,$$

donc,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}$$

est la série de Taylor de f.

Annexe A

Outils de logique de base

En mathématiques ou en sciences plus généralement, on s'intéresse à la véracité d'énoncés et de propriétés. On commence par introduire les valeurs de vétité d'énoncés.

Exemple A.1 (Valeur de vérité).
À toute énoncé, on peut associer une valeur binaire "V" si l'énoncé est vrai ou "F" si l'énoncé est faux. Voyons quelques exemples.

(i) L'énoncé "5 est divisible par 2" est faux et on lui associe la valeur de vérité F.

(ii) L'énoncé "Berne est la capitale de la Suisse" est vrai et on lui associe la valeur de vérité V.

(iii) L'énoncé "On entre facilement en Mordor" est faux. En effet, comme Boromir le dit lors du Conseil d'Elrond à Fondcombe, on n'entre pas facilement en Mordor ("One does not simply walk into Mordor" dans la version originale du film *Le Seigneur des Anneaux, La communauté de l'Anneau.*) On associe donc la valeur F à l'énoncé "On entre facilement en Mordor".

(iv) L'énoncé "27 et 14 sont premiers entre eux" est vrai. On rappelle que deux nombres sont premiers entre eux si le seul diviseur qu'ils ont en commun est 1. Ici, les diviseurs de 27 sont $1, 3, 9$ et 27 tandis que ceux de 14 sont 1, 2, 7, et 14. Le seul diviseur qu'ils ont en commun est donc 1 et ils sont premiers entre eux. On associe donc la valeur V à l'énoncé "27 et 14 sont premiers entre eux".

(v) L'énoncé "la somme des angles d'un triangle donne π radiants" est vrai. On lui associe donc la valeur V.

(vi) L'énoncé "La somme de 3 et 4 est 14" est faux. On lui associe donc la valeur F.

On s'intéresse maintenant à combiner des énoncés.

Exemple A.2 (Et).
Si A et B sont des énoncés logiques, on peut construire un nouvel énoncé en considérant l'énoncé A et B.

(i) L'énoncé "5 est divisible par 2 et on entre facilement en Mordor" est faux car les deux parties de l'énoncé "5 est divisible par 2" et "On entre facilement en Mordor" sont tous deux faux. On associe donc la valeur F à l'énoncé "5 est divisible par 2 et on entre facilement en Mordor".

(ii) L'énoncé "La somme de 3 et 4 est 14 et Berne est la capitale de la Suisse" est faux car une des deux parties de l'énoncé est fausse. On associe donc la valeur F à l'énoncé "La somme de 3 et 4 est 14 et Berne est la capitale de la Suisse".

(iii) L'énoncé "27 et 14 sont premiers entre eux et la somme des angles d'un triangle donne π radiants" est vrai. En effet, les deux parties de l'énoncé sont vraies.

En réalité, la valeur de vérité de l'énoncé "A et B" ne dépend que des valeurs de vérité de A et B. On peut donc résumer les valeurs de vérités de A et B en fonction de celles de A et celles de B dans un tableau :

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

"A et B" est vrai si et seulement si les deux énoncés A et B sont vrais.

Exemple A.3 (Ou)**.**
Si A et B sont des énoncés logiques, on peut construire un nouvel énoncé en considérant l'énoncé A ou B.

(i) L'énoncé "5 est divisible par 2 ou on entre facilement en Mordor" est faux car les deux parties de l'énoncé "5 est divisible par 2" et "On entre facilement en Mordor" sont tous deux faux. On associe donc la valeur F à l'énoncé "5 est divisible par 2 et on entre facilement en Mordor".

(ii) L'énoncé "La somme de 3 et 4 est 14 ou Berne est la capitale de la Suisse" est vrai car une des deux parties de l'énoncé est vraie. On associe donc la valeur V à l'énoncé "La somme de 3 et 4 est 14 et Berne est la capitale de la Suisse".

(iii) L'énoncé "27 et 14 sont premiers entre eux ou la somme des angles d'un triangle donne π radiants" est vrai. En effet, les deux parties de l'énoncé sont vraies.

En réalité, la valeur de vérité de l'énoncé "A ou B" ne dépend que des valeurs de vérité de A et B. On peut donc résumer les valeurs de vérités de A ou B en fonction de celles de A et celles de B dans un tableau :

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

"A ou B" est vrai si et seulement si au moins un des deux énoncés A ou B est vrai.

Exemple A.4 (Négation)**.**
Si A est un énoncé, sa négation logique notée non A ou $\neg A$ est l'énoncé tel que soit A soit $\neg A$ est vrai mais jamais les deux.
Dans le cas d'énoncés simples, la négation logique et la négation française sont les mêmes. Par exemple, la négation de "5 est divisible par 2" est "5 n'est pas divisible par 2".
La négation logique de combinaisons d'énoncés logiques est différente de la négation en français en général. Soit par exemple les énoncés A="x est divisible par 2" et B="x est divisible par 3". On s'intéresse à la négation de "A et B"="x est divisible par 2 et x est divisible par 3. La négation en français de cet énoncé est "x n'est pas divisible par 2 et x n'est pas divisible par 3", qu'on peut écrire dans nos notations "$\neg A$ et $\neg B$". Or, dans ce cas, il y a des cas où les deux énoncés sont faux. Par exemple, si $x = 4$ alors A est vrai et B est faux. Ainsi, "A et B" est faux. Mais on a également que $\neg A$ est faux et $\neg B$ est vrai. Donc, la négation française "$\neg A$ et $\neg B$" est également fausse.

La négation logique de "A et B" est en fait "$\neg A$ ou $\neg B$". En effet, comme on l'a vu avec la combinaison d'énoncés, A et B est faux dès que A ou B est faux.
En général, on a

$$\boxed{\neg(A \text{ et } B) = (\neg A) \text{ ou } (\neg B)}$$

Pour la négation d'énoncés comme "A ou B", on a une règle similaire

$$\boxed{\neg(A \text{ ou } B) = (\neg A) \text{ et } (\neg B)}$$

Exemple A.5 (Quantificateurs)**.**
Comme on l'a vu ci-dessus, on peut introduire des énoncés qui dépendent d'une variable. Si par exemple $P(x)$ est l'énoncé "x est divisible par 2", la valeur de vérité de $P(x)$ dépend de x. Si $x = 14$, la propriété $P(14)$ qui est "14 est divisible par 2" est vraie tandis que $P(5)$ qui est "5 est divisible par 2" est fausse.
Avec ces énoncés qui dépendent d'une variable, on peut créer des nouveaux énoncés logiques à l'aide de *quantificateurs*. Il existe deux quantificateurs : "pour tout" qu'on note $\forall$ et "il existe" qu'on note $\exists$.
Par exemple, si on écrit $\forall x \in \mathbb{N}$, $P(x)$, on entend "Pour tout $x \in \mathbb{N}$, x est divisible par 2" et en écrivant $\exists x \in \mathbb{N}$ tel que $P(x)$, on entend "Il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que x est divisible par 2". Ici l'énoncé $\forall x \in \mathbb{N}$, $P(x)$ est faux car pas tous les nombres naturels sont divisibles par 2, et donc on associe la valeur de vérité F à l'énoncé $\forall x \in \mathbb{N}$, $P(x)$. D'un autre côté $\exists x \in \mathbb{N}$ tel que $P(x)$ est vrai car par exemple 14 est divisible par 2. Il existe plein d'autres exemples de nombres naturels qui sont divisibles par 2, mais l'énoncé prétend qu'il en existe au moins un, ce qui est vrai. On associe donc la valeur de vérité V à l'énoncé $\exists x \in \mathbb{N}$ tel que $P(x)$.
Les quantificateurs introduisent plusieurs situations qu'il faut éclaircir que nous discutons ci-dessous.

(i) La négation.

Comme mentionné dans l'exemple A.4, page 240, dans beaucoup de situations, la négation logique et la négation française sont différentes. On s'intéresse donc ici à déterminer comment on peut écrire de façon élémentaires des énoncés du style

$$\neg(\forall x \in X,\ P(x)) \qquad \neg(\exists x \in X \text{ tel que } P(x)).$$

Commençons par nous intéresser à l'énoncé $\neg(\forall x \in X,\ P(x))$ et regardons ce qu'il se passe lorsqu'on écrit la négation française de cet énoncé dans un cas particulier. On reprend $X = \mathbb{N}$ et $P(x)$ l'énoncé "x est divisible par 2" comme ci-dessus. L'énoncé $\forall x \in X,\ P(x)$ est "Pour tout $x \in \mathbb{N}$, x est divisible par 2". La négation française de cet énoncé est "Pour tout $x \in \mathbb{N}$, x n'est pas divisible par 2" ce qu'on peut écrire avec nos notations comme $\forall x \in \mathbb{N}$, $\neg P(x)$. Or ici, les deux énoncés sont faux. L'énoncé "Pour tout $x \in \mathbb{N}$, x est divisible par 2" est faux comme on a vu ci-dessus et l'énoncé "Pour tout $x \in \mathbb{N}$, x n'est pas divisible par 2" est également faux car par exemple $x = 4$ est divisible par 2. Donc, l'énoncé donné par la négation française ne vérifie pas la propriété désirée et n'est pas la négation logique (on rappelle que si A est un énoncé logique on doit toujours avoir que soit A soit $\neg A$ est vrai, mais jamais les deux en même temps.)

Pour trouver la négation logique, on peut se poser la question d'à partir de quand un énoncé du type $\forall x \in X$, $P(x)$ est faux. Vu que ce genre d'énoncé prétend que $P(x)$ est vrai pour tout élément de X, l'énoncé devient faux dès que un élément de x ne vérifie pas $P(x)$, c'est-à-dire, la négation logique de "Pour tout $x \in X$, $P(x)$" est "Il existe $x \in X$ tel que $\neg P(x)$" ce qu'on peut écrire avec nos notations $\exists x \in X$ tel que $\neg P(x)$. On en déduit donc la formule

$$\boxed{\neg(\forall x \in X,\ P(x)) = \exists x \in X \text{ tel que } \neg P(x).}$$

Pour les énoncés $\neg(\exists x \in X$ tel que $P(x))$, on a un problème similaire. Considérons $X = \mathbb{N}$ et l'énoncé $P(x)$="x est positif". Alors, l'énoncé $\exists x \in \mathbb{N}$ tel que $P(x)$ est "Il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que x est positif" qui est vrai. Sa négation française est "Il n'existe pas $x \in \mathbb{N}$ tel que x n'est pas positif", c'est-à-dire, "Il n'existe pas $x \in \mathbb{N}$ tel que x est strictement négatif". Or cette négation française est également vraie et ne peut donc pas être la négation logique de notre énoncé de base qui était déjà vrai.

À nouveau, pour trouver la négation logique, on peut se poser la question d'à partir de quand un énoncé du type $\exists x \in X$ tel que $P(x)$ est faux. Vu que l'énoncé prétend qu'il existe au moins un élément de X qui vérifie $P(x)$, l'énoncé est faux si aucun élément de X vérifie $P(x)$, c'est-à-dire si tous les éléments de X vérifient $\neg P(x)$. On peut réécrire ceci avec nos notations comme $\forall x \in X$, $\neg P(x)$. On en déduit donc la formule

$$\boxed{\neg(\exists x \in X \text{ tel que } P(x)) = \forall x \in X,\ \neg P(x).}$$

(ii) Mélange de quantificateurs.

Dans les exemples ci-dessus, $P(x)$ ne cachait pas de quantificateur. Mais à priori, on pourrait avoir que $Q(x, y)$ est un énoncé qui dépend de deux variables et l'énoncé $P(x)$ pourrait être $P(x) = \forall y \in Y,\ Q(x, y)$ et on aurait encore un énoncé A qui serait $A = \exists x \in X$ tel que $P(x)$, c'est-à-dire,

$$A = \exists x \in X \text{ tel que } \forall y \in Y,\ Q(x, y).$$

Par exemple si $X = Y = \mathbb{R}$ et $Q(x, y) = x < y$, l'énoncé A serait "il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Avant de se poser la question de la valeur de vérité de cet énoncé, ouvrons une parenthèse sur la question : l'ordre des quantificateurs est-il important ?

Prenons un exemple. Considérons les deux énoncés A ="En 2020, en Suisse, en moyenne, 10 enfants sont nés chaque heure"(*) et l'énoncé B ="En 2020, en Suisse, chaque heure, 10 enfants sont nés".

Soit donc X l'ensemble des groupes de 10 enfants en Suisse, Y l'ensemble des fenêtres de temps d'une heure en 2020 et $P(x, y)$ l'énoncé "le groupe d'enfants x est né dans la fenêtre d'une heure y". Nos énoncés s'écrivent alors dans nos notations

$$\begin{aligned} A =& \exists x \in X \text{ tel que } \forall y \in Y,\ P(x, y) \\ B =& \forall y \in Y,\ \exists x \in X \text{ tel que } P(x, y). \end{aligned}$$

D'un point de vue de nos notations, la différence entre ces deux énoncés est qu'on a échangé l'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Si on revient à nos énoncés en français et qu'on pose la question, ces deux énoncés veulent-ils dire la même chose, toute personne normalement constituée répond "oui, ces deux énoncés veulent dire la même chose". On pourrait donc être amené à croire que l'ordre des quantificateurs n'est pas important.

En réalité, cet exemple du language courant nous induit en erreur : l'ordre des quantificateurs est important. Il existe une autre façon de comprendre les énoncés

*. www.bfs.admin.ch/bfs/fr/home/statistiques/population/naissances-deces/naissances.html

A et B qui est certes bizarre, mais on pourrait imaginer qu'il existe un groupe de 10 enfants qui ont passé leur année 2020 à naître chaque heure. Entendez donc que ces enfants naissaient, retournaient dans le ventre de leur mère de telle sorte à être prêts à renaître une heure plus tard. Pour beaucoup de raisons (notamment le fait que nous savons tous que les bébés ne naissent rarement plus d'une fois et qu'une naissance prend généralement plus d'une heure) nous savons que cette façon de comprendre la phrase est absurde et que donc ça ne peut pas être l'information qu'on veut transmettre en disant une de nos deux phrases.

Malheureusement en mathématiques, on veut pouvoir faire la distinction entre ces deux façons de comprendre la phrase car l'une est vraie et l'autre est fausse. Ce qui sépare les deux façons de comprendre nos deux phrases peut se réduire à la question "le groupe de 10 enfants x change-t-il lorsque nous changeons la fenêtre d'une heure y ?", ou en d'autres termes "x a-t-il le droit de dépendre de y ?" En effet, dans la façon normale de comprendre la phrase il est entendu que si on change la fenêtre d'une heure, le groupe d'enfants change, tandis que dans la façon bizarre de comprendre la phrase, le groupe d'enfants ne change pas si on change la fenêtre d'une heure.

En mathématiques, pour déterminer de quoi une variable dans un quantificateur $\exists$ peut dépendre, on introduit une convention : $\exists x$ n'a la droit de dépendre que des choses qui sont mentionnées avant. Ainsi,

$A = \exists x \in X$ tel que $\forall y \in Y,\ P(x,y)$	x ne peut pas dépendre de y car y est mentionné après dans l'énoncé
$B = \forall y \in Y,\ \exists x \in X$ tel que $P(x,y)$	x a le droit de dépendre de y car y est mentionné avant dans l'énoncé.

Avec cette convention, A est l'énoncé qui s'interprète de façon bizarre et B est l'énoncé qui s'interprète conformément à notre expérience. A est faux et B est vrai.

Analysons avec ces conventions l'autre énoncé que nous avions ci-dessus. Considérons $X = Y = \mathbb{R}$ et $Q(x,y) = x < y$, et $A = \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Pour que cet énoncé soit vrai, il faut qu'il existe x, qui est indépendant de y tel que pour tout y, on a $x < y$. Ceci est faux car quel que soit le x dans $\mathbb{R}$, si on considère $y = x - 1$, on n'aura pas $x < y$. Profitons de cet exemple pour voir quelle est la négation de A. Considérons $P(x)$ l'énoncé $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Avec ce qu'on a vu ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\neg A =& \neg(\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(x))\\ =& \forall x \in \mathbb{R},\ \neg P(x)\\ =& \forall x \in \mathbb{R},\ \neg(\forall y \in \mathbb{R},\ Q(x,y))\\ =& \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } \neg Q(x,y)\\ =& \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq y.\end{aligned}$$

Dans ce nouvel énoncé qui est vrai, y a le droit de dépendre de x. Et la justification le montre bien, si $x \in \mathbb{R}$ est quelconque, $y = x - 1$ (ici, on voit bien que y dépend de x), on a $x \geq y$.

Considérons maintenant encore l'énoncé $B = \forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. Dans cet énoncé, x a le droit de dépendre de y et l'énoncé est vrai. Si $y \in \mathbb{R}$ est quelconque, en prenant $x = y - 1$ (ici, on voit bien que x dépend de y), on a $x < y$.

En conclusion, on voit qu'en intervertissant $\forall$ et $\exists$, on change l'énoncé. Il faut donc faire très attention en écrivant des mathématiques car on peut facilement être tenté d'intervertir les quantificateurs car c'est possible dans certaines situations dans le language courant.

Par contre (et on ne rentre pas dans le détail ici) interverir deux quantificateurs identiques ne change pas l'énoncé. C'est-à-dire

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ Q(x,y) = \forall y \in Y,\ \forall x \in X,\ Q(x,y)$$
$$\exists x \in X \text{ tel que } \exists y \in Y \text{ tel que } Q(x,y) = \exists y \in Y \text{ tel que } \exists x \in X \text{ tel que } Q(x,y).$$

Remarque A.6 (Résumé des choses auxquelles il faut faire attention en logique)**.**

$$\boxed{\begin{aligned}
\forall x,\ \exists y \text{ tel que } ... \quad & \quad y \text{ peut dépendre de } x\\
\exists x \text{ tel que } \forall y,\ ... \quad & \quad x \text{ ne dépend pas de } y\\
\neg(A \text{ ou } B) &= \neg A \text{ et } \neg B\\
\neg(A \text{ et } B) &= \neg A \text{ ou } \neg B\\
\neg(\forall x \in X,\ P(x)) &= \exists x \in X \text{ tel que } \neg P(x)\\
\neg(\forall x \text{ tel que } Q(x),\ P(x)) &= \exists x \text{ tel que } Q(x) \text{ et tel que } \neg P(x)\\
\neg(\exists x \in X \text{ tel que } P(x)) &= \forall x \in X,\ \neg P(x).
\end{aligned}}$$

Index